ამოცანა 31 **2 ქულა**

ამოხსენით განტოლებათა სისტემა $\begin{cases} 3x+8y=6 \\ x+4y=\dfrac{19}{6} \end{cases}$

ამოხსნა

$$\begin{cases} 3x+8y=6 \\ x+4y=\dfrac{19}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+8y=6 \\ x=-4y+\dfrac{19}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12y+9,5+8y=6 \\ x=-4y+\dfrac{19}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4y=-3,5 \\ x=-4y+\dfrac{19}{6} \end{cases}$$

საბოლოოდ მივიღებთ $x=-\dfrac{1}{3}$, $y=\dfrac{7}{8}$.

პასუხი: $x=-\dfrac{1}{3}$, $y=\dfrac{7}{8}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მიიღო ერთი ცვლადის შემცველი განტოლება;
ბ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა.
2 ქულა - ა, ბ.

ამოცანა 32 **2 ქულა**

იპოვეთ 2, -4, 9, x, 10, 8 რიცხვითი მონაცემების მედიანა, თუ ამ მონაცემების საშუალო $\frac{14}{3}$-ის ტოლია.

ამოხსნა

რადგან მონაცემების საშუალო $\frac{14}{3}$-ის ტოლია $\frac{2-4+9+x+10+8}{6}=\frac{14}{3} \Leftrightarrow x=3$, დავალაგოთ რიცხვითი მონაცემები ზრდის მიხედვით: $-4,\ 2,\ 3,\ 8,\ 9,\ 10$. ამიტომ მედიანა ტოლია 5,5-ის.

პასუხი: 5,5

ამოხსნის ეტაპები

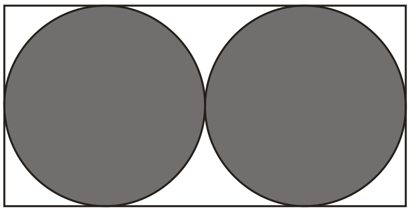
ა) იპოვა x;
ბ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა.
2 ქულა - ა, ბ.

ამოცანა 33 **2 ქულა**

მართკუთხედში ჩახაზულია ორი წრე. თითოეული წრე ეხება მართკუთხედის სამ გვერდსა და მეორე წრეს ისე, როგორც ეს სურათზეა ნაჩვენები. მართკუთხედის ფართობის რა ნაწილს წარმოადგენს გამუქებული ფიგურის ფართობი?



ამოხსნა

ვთქვათ წრეწირების რადიუსი ტოლია r-ის, მაშინ მართკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძეა $2r$, ხოლო მეორე გვერდის სიგრძეა $4r$. ამიტომ მართკუთხედის ფართობი ტოლია $8r^2$-ის, რადგან წრის ფართობი πr^2-ია, გამუქებული ფართობი იქნება მართკუთხედის ფართობის $\frac{2\pi r^2}{8r^2}=\frac{\pi}{4}$ ნაწილი.

პასუხი: $\frac{\pi}{4}$-ნაწილს.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მართკუთხედის გვერდების სიგრძეები დააკავშირა წრეწირის რადიუსთან;
ბ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა.
2 ქულა - ა, ბ.

შენიშვნა

თუ განიხილა კერძო შემთხვევა (მაგ. წრეწირის რადიუსია 1), და ამ პირობით <u>ბოლომდე</u> ამოხსნა ამოცანა, იწერება 1 ქულა.

ამოცანა 34 **2 ქულა**

იპოვეთ სამკუთხედის α კუთხის სიდიდე, თუ სამართლიანია ტოლობა $\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 0$.

ამოხსნა

$\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\,\alpha = -\sqrt{3}$. ე.ი. $\alpha = 120°$.

პასუხი: $\alpha = 120°$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მოცემული განტოლობა დაიყვანა უმარტივეს ტრიგონომეტრიულ განტოლებაზე (მაგ. $\mathrm{tg}\,\alpha = -\sqrt{3}$ ან $\sin(\alpha + 60°) = 0$ ან $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{3}$);

ბ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა.
2 ქულა - ა, ბ.

ამოცანა 35 **3 ქულა**

არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა ნულისაგან განსხვავებულია, ხოლო პირველი, მეხუთე და მეექვსე წევრები გეომეტრიულ პროგრესიას ქმნიან. იპოვეთ ამ გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი.

ამოხსნა 1

ვთქვათ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრია a_1, ხოლო სხვაობაა d. რადგან a_1, $a_5 = a_1 + 4d$, $a_6 = a_1 + 5d$ გეომეტრიულ პროგრესიას ქმნიან, ამიტომ $(a_1 + 4d)^2 = a_1(a_1 + 5d)$.

$$a_1^2 + 8a_1 d + 16d^2 = a_1^2 + 5a_1 d \Rightarrow 3a_1 d = -16d^2 \Rightarrow a_1 = -\frac{16}{3}d.$$

გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი ტოლია

$\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 + 4d}{a_1} = \frac{-4d}{3} : \frac{-16d}{3} = \frac{1}{4}$.

ამოხსნა 2

ვთქვათ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრია b_1, ხოლო მნიშვნელი q, მაშინ $b_1 q = b_1 + 4d$, $b_1 q^2 = b_1 + 5d$, სადაც d არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობაა. გამოვრიცხოთ ამ ტოლობებიდან d:

$$5b_1 q - 4b_1 q^2 = b_1.$$

შევნიშნოთ, რომ b_1 არ შეიძლება 0-ის ტოლი იყოს, ამიტომ $4q^2 - 5q + 1 = 0$.

$q_1 = \frac{1}{4}$, $q_2 = 1$. რადგან პროგრესია მუდმივი არ არის, ამიტომ $q = \frac{1}{4}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაამყარა კავშირი არითმეტიკულ და გეომეტრიულ პროგრესიებს შორის (მაგ. $(a_1 + 4d)^2 = a_1(a_1 + 5d)$ ან $b_1 q = b_1 + 4d$, $b_1 q^2 = b_1 + 5d$);

ბ) მიიღო კვადრატული განტოლება გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელის მიმართ ($4q^2 - 5q + 1 = 0$) ან გამოსახა არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა პირველი წევრის საშუალებით, ან პირიქით (მაგ. $d = -\frac{3}{16}a_1$, ან $a_1 = -\frac{16}{3}d$);

გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა: ა.

2 ქულა: ა,ბ.

3 ქულა: ა,ბ, გ.

ამოცანა 36 **3 ქულა**

ამოხსენით განტოლება $3^{2x}-2^{x+1}\cdot 3^{x}-3\cdot 2^{2x}=0$.

ამოხსნა

$$3^{2x}-2^{x+1}\cdot 3^{x}-3\cdot 2^{2x}=0 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-2\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-3=0 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=-1 \quad \text{ან} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{x}=3$$

საიდანაც მივიღებთ $x=\log_{3/2}3$.

პასუხი: $x=\log_{3/2}3$

ამოხსნის ეტაპები

ა) მიიღო კვადრატული განტოლება $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$-ის ან $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ მიმართ, მაგ.

$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-2\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-3=0$, ან დაწერა ტოლობა $3^{x}=3\cdot 2^{x}$;

ბ) იპოვა ა) პუნქტში მიღებული კვადრატული განტოლების ფესვები;

გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა;

2 ქულა - ა, ბ;

3 ქულა - ა, ბ, გ;

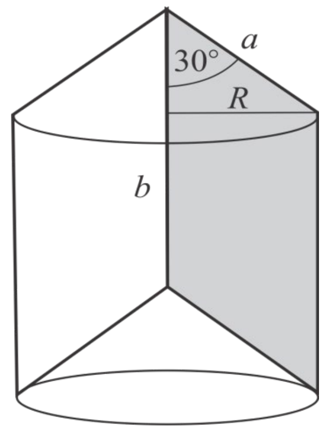
შენიშვნა. თუ განტოლება დაიყვანა $a^2-2ab-3b^2=0$ სახეზე და დაწერა ტოლობები $a=-b,\ a=3b$, იწერება 1 ქულა.

ამოცანა 37 **3 ქულა**

პარალელოგრამი, რომლის გვერდების სიგრძეებია $a=4$ და $b=5$, ხოლო კუთხე მათ შორის $30°$-ია, ბრუნავს დიდი გვერდის გარშემო. იპოვეთ მიღებული ბრუნვითი სხეულის ზედაპირის ფართობი.

ამოხსნა

მიღებული ბრუნვითი სხეულის ზედაპირის ფართობი $S=S_1+2S_2$, სადაც S_1 არის დიდი გვერდის ბრუნვით შექმნილი ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, ხოლო S_2 - მცირე გვერდის ბრუნვით შექმნილი კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.



$R=a\cdot\sin 30°=\dfrac{a}{2}=2$.

$S_1=2\pi\cdot R\cdot b=20\pi$, $\quad S_2=\pi\cdot R\cdot a=8\pi$.

$S=36\pi$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაწერა ფორმულა $S=S_1+2S_2$;

ბ) გამოთვალა R;

გ) გამოთვალა S_1 ან S_2;

დ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა: ა; ან ბ.

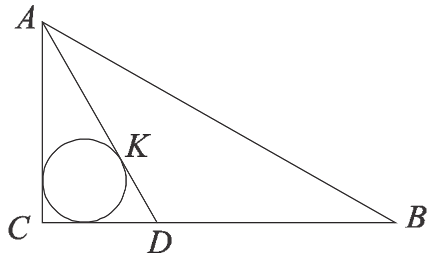
2 ქულა: გ.

3 ქულა: გ, დ.

ამოცანა 38 **4 ქულა**

ABC სამკუთხედში, სადაც $AC=6$, $CB=8$ და $\angle C=90^\circ$, CB კათეტზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ ACD სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი 1-ის ტოლია. იპოვეთ ADB სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

ამოხსნა



ვთქვათ, CD-ს სიგრძეა x. მაშინ

$S_{ACD}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot x=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(6+x+\sqrt{36+x^2}\right)$, საიდანაც

მივიღებთ $5x-6=\sqrt{36+x^2}$. ავიყვანოთ კვადარატში განტოლების ორივე მხარე, მაშინ გვექნება

$25x^2-60x+36=36+x^2 \Leftrightarrow 24x^2-60x=0 \Rightarrow x=\frac{60}{24}=\frac{5}{2}$.

(შევნიშნოთ, რომ $25/2-6>0$). მაშინ $AD=\sqrt{36+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{169}{4}}=\frac{13}{2}$.

ADB სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი R -ის გამოსათვლელად

ვისარგებლოთ ფორმულით $R=\frac{AD}{2\sin B}=\frac{13/2}{2\cdot 6/10}=\frac{65}{12}$.

პასუხი. $\frac{65}{12}$

ამოხსნის ეტაპები

ა) ერთმანეთს დააკავშირა ACD მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი და ჩახაზული წრეწირის რადიუსი. მაგალითად, დაწერა $S_{ACD}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(6+x+\sqrt{36+x^2}\right)$;

ან ერთმანეთს დააკავშირა AD და CD გვერდი ACD სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის საშუალებით, მაგ. დაწერა $CD = AD - 4$.

ბ) ADB სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსისთვის დაწერა $R=\frac{AD}{2\sin B}$ ან მისი ანალოგიური ფორმულა; ან დაწერა ტოლობა $R=\frac{AD\cdot AB\cdot DB}{4S_{ADB}}$;

ან იპოვა ADB სამკუთხედის ერთ-ერთი კუთხის სინუსი.

გ) დაწერა ერთი ცვლადის შემცველი განტოლება, საიდანაც შესაძლებელია CD ან AD-ს სიგრძის პოვნა. მაგ. $5\cdot CD-6=\sqrt{36+CD^2}$, ან $(5+KD)^2=(1+KD)^2+36$, ან $AD^2=\left(AD-4\right)^2+36$;

დ) ამოხსნა გ) -ში მიღებული განტოლება;

ე) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა ან ბ;

2 ქულა - გ;

3 ქულა - ბ, დ;

4 ქულა - ბ, დ, ე.

ამოცანა 39 **4 ქულა**

A და B პუნქტებს შორის მანძილი 21 კმ-ია. მგზავრი A პუნქტიდან B პუნქტისკენ V სიჩქარით გაემგზავრა. თუ იგი სიჩქარეს გაზრდის 10%-ით, მაშინ ტურისტი 2 სთ-ში მთელი მანძილის ნახევარზე მეტს გაივლის, ხოლო თუ სიჩქარეს შეამცირებს 20%-ით, მაშინ მას B პუნქტამდე მისასვლელად 3 საათიც კი არ ეყოფა. იპოვეთ V-ს ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ამოხსნა

ამოცანის პირობის თანახმად გვექნება

$$1,1V \cdot 2 > \frac{21}{2} \Leftrightarrow V > \frac{105}{22}$$

და

$$0,8V \cdot 3 < 21 \Leftrightarrow V < \frac{35}{4} .$$

პასუხი: $\frac{105}{22}$ კმ/სთ $< V < \frac{35}{4}$ კმ/სთ.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაწერა $1,1V$ ან $0,8V$;

ბ) დაწერა $2 \cdot 1,1V > \frac{21}{2}$ ან მისი ტოლფასი უტოლობა;

გ) დაწერა $3 \cdot 0,8V < 21$ ან მისი ტოლფასი უტოლობა;

დ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა;
2 ქულა - ბ ან გ;
3 ქულა - ბ, გ;
4 ქულა - ბ, გ, დ.

ამოცანა 40 **4 ქულა**

$f(x)=x^2+px+q$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა არის -10. ამასთან ცნობილია, რომ ამ ფუნქციის კლებადობის ინტერვალი მოიცავს $(-\infty;-7)$ შუალედს, ხოლო ზრდადობის ინტერვალი მოიცავს $\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$ შუალედს. ამ პირობების დამაკმაყოფილებელი ყველა p და q პარამეტრებისათვის იპოვეთ $p+q$ გამოსახულების უმცირესი მნიშვნელობა.

ამოხსნა

კვადრატული სამწევრის თვისებების გათვალისწინებით დავადგენთ, რომ ამ სამწევრით განსაზღვრული პარაბოლის წვეროს აბსცისა მოთავსებულია $\left[-7;-\frac{3}{4}\right]$ სეგმენტში, ხოლო წვეროს ორდინატა ტოლია -10 -ის. ე.ი.

$-7\le-\frac{p}{2}\le-\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\le p\le14$.

$-\frac{D}{4}=-10\Leftrightarrow p^2-4q=40\Rightarrow q=\frac{p^2}{4}-10$.

$p+q=p+\frac{p^2}{4}-10$.

ამრიგად, ამოცანა დავიყვანეთ $g(p)=\frac{p^2}{4}+p-10$ კვადრატული სამწევრის უმცირესი მნიშვნელობის პოვნაზე $\frac{3}{2}\le p\le14$ შუალედში. g ფუნქციის გრაფიკის (პარაბოლას) წვეროს აბსცისაა $-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$. მაშასადამე, $g(p)$ კვადრატული სამწევრი ზრდადია $[-2;+\infty)$ შუალედზე, მაშინ $\frac{3}{2}\le p\le14$ შუალედში $g(p)$ ფუნქცია უმცირეს მნიშვნელობას ღებულობს $p_0=\frac{3}{2}$ წერტილზე.

$$g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{9}{4}}{4}+\frac{3}{2}-10=\frac{9}{16}+\frac{3}{2}-10=\frac{33}{16}-10=-\frac{127}{16}\ .$$

პასუხი: $-\frac{127}{16}$**.**

ამოხსნის ეტაპები

ა) $\frac{3}{2}\le p\le14$ უტოლობის ან მისი ტოლფასი უტოლობის დადგენა;

ბ) $q=\frac{p^2}{4}-10$ ტოლობის ან მისი ტოლფასი ტოლობის მიღება;

გ) $g(p)=\frac{p^2}{4}+p-10$ ფუნქციის მიღება;

დ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა; ან ბ.
2 ქულა - ა, ბ; ან გ.
3 ქულა - ა, გ;
4 ქულა - ა, გ, დ.

<u>შენიშვნები:</u> 1) თუ ჩათვალა, რომ $f(x) = x^2 + px + q$ ფუნქციის გრაფიკის წვეროს აბსცისაა -7 ან $-\frac{3}{4}$ და ამ დაშვებით იპოვა $p+q$ -ს მნიშვნელობა, იწერება 2 ქულა;

2) თუ შეასრულა ა), ბ), დ) პუნქტები და შენიშნა, რომ თუ p უმცირესია, მაშინ $p+q$ არის უმცირესი, იწერება 4 ქულა;

3) თუ $\frac{3}{2} \le p \le 14$ უტოლობის ნაცვლად დაწერა $\frac{3}{2} < p < 14$ უტოლობა, მაგრამ შემდეგ ამოხსნა სწორად, იწერება 4 ქულა.