ტესტი მათემატიკაში

ნიმუში

სწორი პასუხები

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
დ	გ	გ	ბ	ა	ა	ა	დ	ბ	ა	გ	ბ	ბ	დ	გ

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
ა	ბ	ა	ა	გ	დ	ბ	ბ	გ	დ	დ	ა

ამოცანა 28 **2 ქულა**

ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 5x-4y=11 \end{cases}$$

ამოხსნა

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 5x-4y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3y+7}{2} \\ 5x-4y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3y+7}{2} \\ 5\cdot\dfrac{-3y+7}{2}-4y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3y+7}{2} \\ -15y+35-8y=22 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-3y+7}{2} \\ y=\dfrac{13}{23} \end{cases}$$

საბოლოოდ მივიღებთ $x=\dfrac{61}{23}$, $y=\dfrac{13}{23}$.

პასუხი: $x=\dfrac{61}{23}$, $y=\dfrac{13}{23}$.

ამოცანა 29 **2 ქულა**

ღვინის მწარმოებელი ფირმა ღვინოს ყიდის პარტიებად შემდეგი წესით: x ბოთლისგან შედგენილი პარტიის ყიდვის შემთხვევაში, სადაც $x \le 4900$, თითოეული ბოთლი ღვინის ფასი იქნება $500-0,1x$ ლარი. სულ მცირე, რამდენი ბოთლი ღვინო იყიდა მყიდველმა, თუ მან თითოეულ ბოთლ ღვინოში 15 ლარზე ნაკლები გადაიხადა?

ამოხსნა

ვთქვათ მყიდველმა იყიდა x ბოთლი ღვინო, ამასთან თითოეულ ბოთლ ღვინოში 15 ლარზე ნაკლები გადაიხადა, მაშინ

$$500-0,1x<15 \Rightarrow x>4850.$$

პასუხი: 4851.

ამოცანა 30 **3 ქულა**

იპოვეთ x -ის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა, თუ $1; -3; 10; x; 5; 4$ რიცხვითი მონაცემების გაბნევის დიაპაზონი 17-ის ტოლია.

ამოხსნა

თუ $-3 \le x \le 10$ მაშინ მონაცემების გაბნევის დიაპაზონი $10-(-3)=13$ -ის ტოლია, რაც პირობას არ აკმაყოფილებს.

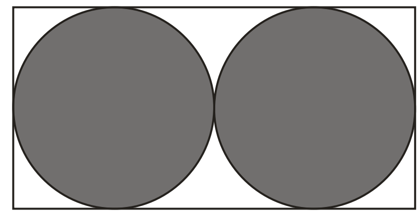
თუ $x<-3$ მაშინ პირობის თანახმად გვექნება $10-x=17 \Leftrightarrow x=-7$.

თუ $x>10$ მაშინ პირობის თანახმად გვექნება $x+3=17 \Leftrightarrow x=14$.

პასუხი: -7 და 14.

ამოცანა 31 **3 ქულა**

მართკუთხედში ჩახაზულია ორი წრე. თითოეული წრე ეხება მართკუთხედის სამ გვერდსა და მეორე წრეს ისე, როგორც ეს სურათზეა ნაჩვენები. მართკუთხედის ფართობის რა ნაწილს წარმოადგენს გამუქებული ფიგურის ფართობი?



ამოხსნა

ვთქვათ წრეწირების რადიუსი ტოლია r-ის, მაშინ მართკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძეა $2r$, ხოლო მეორე გვერდის სიგრძეა $4r$. ამიტომ მართკუთხედის ფართობი ტოლია $8r^2$-ის, რადგან წრის ფართობი πr^2-ია, გამუქებული ფართობი იქნება მართკუთხედის ფართობის $\frac{2\pi r^2}{8r^2} = \frac{\pi}{4}$ ნაწილი.

პასუხი: $\frac{\pi}{4}$-ნაწილს.

ამოცანა 32 **3 ქულა**

მოცემულია (a_n) არითმეტიკული პროგრესია, რომლის სხვაობა განსხვავებულია ნულისაგან. იპოვეთ ისეთი k და m ნომრები, რომ $k+m=13$ და $2a_k + a_3 = a_m + 2a_7$.

ამოხსნა

გვაქვს, $2(a_1+(k-1)d)+a_1+2d = a_1+(m-1)d+2(a_1+6d) \Leftrightarrow 3a_1+2kd = 3a_1+(m+11)d \Leftrightarrow$ $2k = m+11 \Leftrightarrow 2k-m=11$.

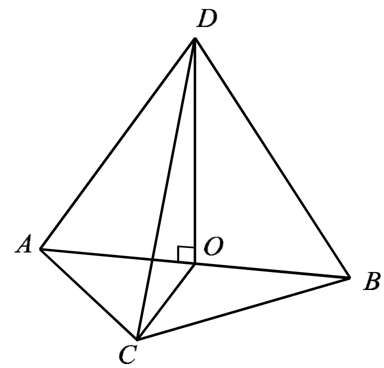
მიღებულ ტოლობას მივუმატოთ პირობაში მოცემული $k+m=13$ ტოლობა. მივიღებთ $3k=24 \Leftrightarrow k=8$. მაშინ $m=5$.

პასუხი: $k=8$ და $m=5$.

ამოცანა 33 **3 ქულა**

სამკუთხა პირამიდის ფუძე წარმოადგენს მართკუთხა სამკუთხედს, რომლის კათეტები ტოლია 3 სმ-ის და $\sqrt{3}$ სმ-ის. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი წიბოების მიერ ფუძის სიბრტყესთან შედგენილი კუთხეები, თუ ცნობილია, რომ ამ პირამიდის ყველა გვერდითი წიბოს სიგრძე 2 სმ-ის ტოლია.

ამოხსნა



შევნიშნოთ, რომ რადგან სამივე გვერდითი წიბო ერთმანეთის ტოლია, ამიტომ ისინი ფუძესთან ტოლ კუთხეებს ქმნის.
პირამიდის ფუძე აღვნიშნოთ ABC -თი, სადაც $AC=\sqrt{3}$ სმ $BC=3$ სმ და $\angle C=90°$. აქედან $AB=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$ სმ. პირამიდის D წვეროდან ფუძეზე დავუშვათ DO მართობი. $DA=DB=DC=2$ სმ, ამიტომ $AO=BO=CO=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{3}$ სმ. და წიბოების მიერ ფუძის სიბრტყესთან შედგენილი კუთხეების კოსინუსი ტოლია $\cos\angle DAO=\dfrac{AO}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ხოლო კუთხეები უდრის $30°$.

პასუხი: პირამიდის გვერდითი წიბოების მიერ ფუძის სიბრტყესთან შედგენილი კუთხეები ტოლია $30°$.

ამოცანა 34 **4 ქულა**

A პუნქტიდან B პუნქტებს შორის მანძილი 240 კილომეტრია. A პუნქტიდან B პუნქტის მიმართულებით მუდმივი სიჩქარით გაემართა ავტობუსი. 1 საათის შემდეგ B პუნქტიდან A პუნქტის მიმართულებით მუდმივი სიჩქარით გაემართა მსუბუქი ავტომობილი. ავტობუსი და მსუბუქი ავტომობილი ერთმანეთს A და B პუნქტების შემაერთებელი გზის შუაში შეხვდნენ. ამის შემდეგ, მათ შეუჩერებლად იმავე სიჩქარეებით გააგრძელეს გზა და როდესაც მათ შორის მანძილი 180 კმ გახდა, ავტობუსის გამოსვლიდან ზუსტად 3 საათი იყო გასული. იპოვეთ მსუბუქი ავტომობილის სიჩქარე.

ამოხსნა 1

დავუშვათ, მსუბუქი ავტომობილი საათში გადის u კილომეტრს, ხოლო ავტობუსი v კილომეტრს. შეხვედრის მომენტისთვის მსუბუქი ავტომობილი $\dfrac{120}{u}$ საათის განმავლობაში

მოძრაობდა, ხოლო ავტობუსი მოძრაობდა $\frac{120}{v}$ საათის განმავლობაში, ამიტომ $\frac{120}{v}-\frac{120}{u}=1$.
ავტობუსმა გამოსვლიდან 3 საათში გაიარა $3v$ კილომეტრი. ამ მომენტისათვის მსუბუქმა ავტომობილმა გაიარა $2u$ კილომეტრი. ამიტომ $2u+3v=420$. ვღებულობთ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} 120\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right)=1 \\ 2u+3v=420 \end{cases}$$

$u=210-\frac{3}{2}v$, $3v^2-1020v+240\cdot 210=0$, $v^2-340v+16800=0$, $u=120,\ v=60$. (ფესვი $v=280$ ამოცანის პირობას არ აკმაყოფილებს, რადგან ამ შემთხვევაში $2u+3v>420$).
პასუხი: 120კმ/სთ.

ამოხსნა 2

ვთქვათ, ავტობუსი და მსუბუქი ავტომობილი ერთმანეთს ავტობუსის გამოსვლიდან t საათის შემდეგ შეხვდნენ. მაშინ ავტობუსის სიჩქარეა $\frac{120}{t}$ კმ/სთ, ხოლო მსუბუქი ავტომობილის სიჩქარეა $\frac{120}{t-1}$ კმ/სთ. ავტობუსის გამოსვლიდან 3 საათის შემდეგ ავტობუსს გავლილი ჰქონდა $\frac{3\cdot 120}{t}$ კმ, ხოლო მსუბუქი ავტომობილს $\frac{2\cdot 120}{t-1}$ კმ. ვღებულობთ განტოლებას $\frac{3\cdot 120}{t}+\frac{2\cdot 120}{t-1}=420$. განტოლების გამარტივება გვაძლევს $7t^2-17t+6=0$, საიდანაც $t_1=2,\ t_2=\frac{3}{7}$. ამონახსნი $t=\frac{3}{7}$ ამოცანის პირობას არ აკმაყოფილებს (ამ შემთხვევაში მსუბუქი ავტომობილის სიჩქარეა $\frac{120}{t-1}=-210$ კმ/სთ). ამიტომ $t=2$. ვღებულობთ, რომ ავტობუსის სიჩქარეა $\frac{120}{t}=60$ კმ/სთ, ხოლო მსუბუქი ავტომობილის სიჩქარეა 120 კმ/სთ.

პასუხი: 120კმ/სთ.

ამოცანა 35 **4 ქულა**

სიბრტყეზე განვიხილოთ ყველა ტოლფერდა ტრაპეცია, რომელთა მახვილი კუთხეა α და ფართობია 10 სმ². ამ ტრაპეციების პერიმეტრებს შორის იპოვეთ უმცირესი, თუ $\sin\alpha = \frac{1}{5}$.

ამოხსნა

განვიხილოთ ერთ-ერთი ტრაპეცია, რომლის მახვილი კუთხეა α და ფართობი არის 10 სმ². ვთქვათ, ამ ტრაპეციის ფუძეებია a სმ და b სმ ($b < a$), ხოლო სიმაღლე h სმ. მაშინ,

$$10 = \frac{a+b}{2}h \Rightarrow a+b = \frac{20}{h}.$$

ტრაპეციის ფერდი ტოლია $\frac{h}{\sin\alpha} = 5h$ სმ. ამიტომ, ტრაპეციის პერიმეტრია

$P(h) = \frac{2h}{\sin\alpha} + \frac{20}{h} = 10h + \frac{20}{h}$ სმ.

თუ გამოვიყენებთ არაუარყოფითი რიცხვებისათვის ცნობილ უტოლობას $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, რომელშიც ტოლობა მიიღწევა, როდესაც $x = y$, მივიღებთ:

$$P(h) = \frac{2h}{\sin\alpha} + \frac{20}{h} \geq 2\sqrt{\frac{2h}{\sin\alpha}\cdot\frac{20}{h}} = 4\sqrt{\frac{10}{\sin\alpha}} = 20\sqrt{2} \text{ სმ.}$$

ამ უტოლობაში ტოლობა მიიღწევა, როდესაც $\frac{2h}{\sin\alpha} = \frac{20}{h}$, ანუ $h = \sqrt{10\sin\alpha} = \sqrt{2}$.

შევამოწმოთ, რომ ამ მონაცემების მქონე ტრაპეცია მართლაც არსებობს. მართლაც, ავიღოთ $h = \sqrt{2}$, მაშინ ფერდის სიგრძე იქნება $\frac{h}{\sin\alpha} = 5\sqrt{2}$ და ვღებულობთ:

$$\begin{cases} a+b = 10\sqrt{2} \\ a-b = 8\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow a = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3},\ b = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ტოლფერდა ტრაპეცია ფუძეებით $a = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ სმ, $b = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$ სმ და სიმაღლით $h = \sqrt{2}$ სმ აკმაყოფილებს ამოცანის ყველა პირობას და მისი პერიმეტრია $20\sqrt{2}$ სმ.

მაშასადამე, პერიმეტრის უმცირესი მნიშვნელობაა $20\sqrt{2}$ სმ.

პასუხი: $20\sqrt{2}$ სმ.