შეფასების სქემა

მათემატიკა - II ვარიანტი

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ა	ა	ბ	ბ	ბ	ბ	გ	გ	გ	ა	ბ	დ	ა	ბ

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
დ	ა	გ	დ	დ	დ	ა	დ	დ	ბ	გ	გ	დ

(2) 28.

ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 5x+2y=0 \\ 3x-7y=2 \end{cases}$$

ამოხსნა

$$\begin{cases} 5x+2y=0 \\ 3x-7y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-0,4y \\ -1,2y-7y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-0,4y \\ -8,2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-0,4y \\ y=-\dfrac{10}{41} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{41} \\ y=-\dfrac{10}{41} \end{cases}$$

ამოხსნის ეტაპები

ა) მიიღო ერთი ცვლადის შემცველი განტოლება;

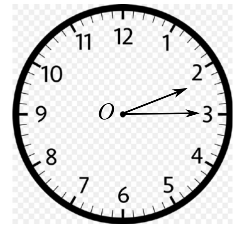
ბ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა;
2 ქულა - ა, ბ.

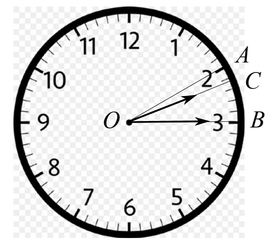
(2) 29.

საათი აჩვენებს 2 საათსა და 15 წუთს. იპოვეთ კუთხის სიდიდე წუთებისა და საათების ისრებს შორის.



ამოხსნა

საათების ისარი 1 საათში ანუ 60 წუთში შემოწერს $\frac{360°}{12}=30°$-ის ტოლ კუთხეს, მაშინ 15 წუთში შემოწერს $\frac{15°}{2}$-ის ტოლ კუთხეს $\angle AOC=\frac{15°}{2}$. რადგან $\angle AOB=30°$, მაშინ წუთების და საათების ისრებს შორის კუთხის სიდიდე ტოლი იქნება $30°-7,5°=22,5°$.



პასუხი: $22,5°$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) იპოვა საათების ან წუთების ისრის მიერ დროის რაიმე ინტერვალში შემოწერილი კუთხის სიდიდე (მაგ., $0,5°$/წთ ან $6°$/წთ);

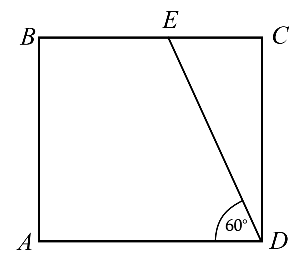
ბ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა;
2 ქულა - ა, ბ.

(3) 30.

$ABCD$ კვადრატის BC გვერდზე აღებულია ისეთი E წერტილი, რომ $\angle ADE = 60°$. იპოვეთ $ABED$ ოთხკუთხედის ფართობი, თუ $ED = a$.



ამოხსნა

$$\angle CDE = 30°,\ CD = ED \cdot \cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ EC = ED \cdot \sin 30° = \frac{a}{2}.$$

$$S_{ABED} = \frac{BE + AD}{2} \cdot CD = \frac{(BC - EC + AD) \cdot CD}{2} = \frac{6-\sqrt{3}}{8}a^2.$$

პასუხი: $S_{ABED} = \dfrac{6-\sqrt{3}}{8}a^2$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გამოთვალა CD ან CE მონაკვეთის სიგრძე.

ბ) გამოთვალა CD და CE მონაკვეთების სიგრძეები;

ან გამოთვალა ECD სამკუთხედის ფართობი;

ან CD ან CE მონაკვეთების საშუალებით გამოთვალა $ABED$ ოთხკუთხედის ფართობი.

გ) გამოთვალა $ABED$ ოთხკუთხედის ფართობი.

შეფასების სქემა

1 ქულა: ა;

2 ქულა: ბ;

3 ქულა: ბ, გ.

(3) 31.

a_n არითმეტიკული პროგრესიის წევრები განსაზღვრულია ფორმულით $a_n = 5 - \frac{4}{7}n$. იპოვეთ ამ პროგრესიის პირველი 35 წევრის ჯამი.

ამოხსნა

$a_1 = 5 - \frac{4}{7} = \frac{31}{7}$, ხოლო პროგრესიის სხვაობა ტოლია $d = a_n - a_{n-1} = -\frac{4}{7}$.

$$S_{35} = \frac{2a_1 + 34d}{2} \cdot 35 = 35(a_1 + 17d) = 35 \cdot \frac{31}{7} + 17 \cdot 35 \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) = 5(31 - 68) = -5 \cdot 37 = -185.$$

პასუხი: -185.

ამოხსნის ეტაპები

ა) იპოვა არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი;
ბ) იპოვა არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა;
გ) იპოვა არითმეტიკული პროგრესიის 35-ე წევრი;
დ) იპოვა არითმეტიკული პროგრესიის მე-18 წევრი;
ე) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა; ან ბ; ან გ; ან დ.
2 ქულა - ა, ბ; ან ა, გ; ან ბ,გ.
3 ქულა - ა, ბ, ე; ან ა, გ, ე; ან დ, ე.

(3) 32.

იპოვეთ x-ის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც კუთხე $\vec{a}(x-2;\ x)$ და $\vec{b}(3x;\ -2x-1)$ ვექტორებს შორის ეკუთვნის $(90°;\ 180°]$ შუალედს.

ამოხსნა

ორ არანულოვან ვექტორს შორის კუთხის კოსინუსი ტოლია $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. ამიტომ, ორ ვექტორს შორის კუთხე ეკუთვნის $(90°;\ 180°]$ შუალედს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მათი სკალარული ნამრავლი უარყოფითია. $\vec{a}\cdot\vec{b}=3x^2-6x-2x^2-x<0 \Leftrightarrow x^2-7x<0 \Leftrightarrow x\in(0;\ 7)$.

პასუხი: $(0;\ 7)$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაწერა უტოლობა $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$ ან მისი ტოლფასი უტოლობა (მაგ. კოსინუსების თეორემის გამოყენებით);
ბ) მიიღო $x^2-7x<0$ ან მისი ტოლფასი კვადრატული უტოლობა;
გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

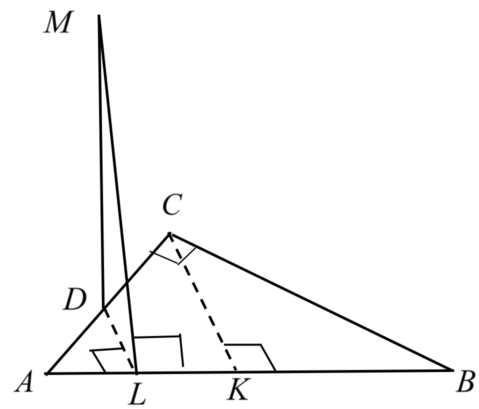
1 ქულა - ა.
2 ქულა - ბ.
3 ქულა - ბ, გ.

შენიშვნა: თუ იპოვა $x^2-7x=0$ განტოლების ფესვები, შეფასდეს 1 ქულით.

(3) 33.

ABC სამკუთხედში $\angle ACB = 90°$. სამკუთხედის AC გვერდის D შუაწერტილიდან ამ სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია DM მართობი. ცნობილია, რომ $AC = 15$ სმ, $BC = 20$ სმ და $DM = \sqrt{85}$ სმ. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან AB წრფემდე.

ამოხსნა



ABC სამკუთხედში გავავლოთ CK სიმაღლე. გვაქვს:

$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{225 + 400} = 25$; $CK = \dfrac{AC \cdot CB}{AB} = 12$.

D წერტილიდან დავუშვათ DL მართობი AB ჰიპოტენუზაზე.

ვინაიდან D არის AC გვერდის შუაწერტილი, ამიტომ $DL = \dfrac{CK}{2} = 6$. M წერტილი შევაერთოთ L-თან. ვინაიდან ML მონაკვეთის გეგმილი ABC სამკუთხედის სიბრტყეში არის DL მონაკვეთი და $DL \perp AB$, ამიტომ სამი მართობის შესახებ თეორემის ძალით $ML \perp AB$, ამიტომ საძიებელი მანძილი იქნება: $ML = \sqrt{MD^2 + DL^2} = \sqrt{85 + 36} = 11$.

პასუხი: 11სმ.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გამოთვალა CK სიმაღლე;
ან აღნიშნა, რომ ΔADL მსგავსია ΔACK;
ან ΔADL მსგავსია ΔABC;
ან ნახაზზე გამოსახა საძიებელი ML მონაკვეთი შესაბამისი მართი კუთხის მითითებით;

ბ) გამოთვალა DL მონაკვეთის სიგრძე;

გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა.
2 ქულა - ა, ბ.
3 ქულა - ა, ბ, გ.

შენიშვნა. თუ ჩათვალა, რომ $DL = \dfrac{BC}{2}$ და ამ პირობით ბოლომდე ამოხსნა ამოცანა, იწერება 1 ქულა.

(4) 34.

მატარებელი მოძრაობს წრფის გასწვრივ მუდმივი სიჩქარით. როდესაც მატარებლის საწყისი წერტილი ნინოს ჩაუვლის, ნინო იწყებს მუდმივი სიჩქარით მოძრაობას მატარებლის მოძრაობის მიმართულებით და ჩერდება დროის იმ მომენტში, როდესაც მას მატარებლის ბოლო წერტილი ჩაუვლის. აღმოჩნდა, რომ ნინომ ამ შემთხვევაში გაიარა 45 მეტრი. თუ ნინო იმავე სიჩქარით იმოძრავებდა მატარებლის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით მატარებლის საწყისი წერტილის ჩავლის მომენტიდან მატარებლის ბოლო წერტილის ჩავლის მომენტამდე, მაშინ ის გაივლიდა 30 მეტრს. იპოვეთ მატარებლის სიგრძე.

ამოხსნა 1

ვთქვათ, მატარებლის სიგრძეა x მეტრი, ნინომ იმოძრავა მატარებლის მოძრაობის მიმართულებით t_1 წუთის განმავლობაში, ხოლო მატარებლის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით t_2 წუთის განმავლობაში. ნინოს სიჩქარე მატარებლის მოძრაობის მიმართულებით მოძრაობის შემთხვევაში იქნება $\frac{45}{t_1}$ მ/წთ, ხოლო მატარებლის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობის შემთხვევაში იქნება $\frac{30}{t_2}$ მ/წთ. ვინაიდან ნინო ორივეში შემთხვევაში ერთი და იგივე სიჩქარით მოძრაობს, ამიტომ გვექნება განტოლება: $\frac{45}{t_1}=\frac{30}{t_2}$.

შევნიშნოთ, რომ მატარებლის საწყისი წერტილი პირველ შემთხვევაში t_1 წუთის განმავლობაში გაივლის $x+45$ მეტრს, ხოლო მეორე შემთხვევაში t_2 წუთის განმავლობაში გაივლის $x-30$ მეტრს. ვინაიდან მატარებელი ორივე შემთხვევაში ერთი და იგივე სიჩქარით მოძრაობს, ამიტომ გვექნება განტოლება: $\frac{x+45}{t_1}=\frac{x-30}{t_2}$. ამრიგად, გვაქვს სისტემა:

$$\begin{cases}\frac{45}{t_1}=\frac{30}{t_2}\\ \frac{x+45}{t_1}=\frac{x-30}{t_2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{t_1}{t_2}=\frac{3}{2}\\ \frac{t_1}{t_2}=\frac{x+45}{x-30}\end{cases} \Rightarrow \frac{x+45}{x-30}=\frac{3}{2} \Rightarrow 3x-90=2x+90 \Rightarrow x=180.$$

პასუხი: 180 მ.

ამოხსნა 2

ვთქვათ, მატარებლის სიგრძეა x მეტრი, ნინოს მოძრაობის სიჩქარეა v_1 მ/წთ, ხოლო მატარებლის მოძრაობის სიჩქარეა v_2 მ/წთ. მაშინ ნინომ იმოძრავა მატარებლის მოძრაობის მიმართულებით $\frac{45}{v_1}$ წუთის განმავლობაში. მატარებლის საწყისი წერტილი გაივლის $x+45$ მეტრს იგივე დროის, ანუ $\frac{x+45}{v_2}$ წუთის

განმავლობაში. ამიტომ გვექნება განტოლება $\frac{45}{v_1}=\frac{x+45}{v_2}$. ნინო იმოძრავებს მატარებლის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით $\frac{30}{v_1}$ წუთის განმავლობაში. ამ შემთხვევაში მატარებლის საწყისი წერტილი გაივლის $x-30$ მეტრს იგივე დროის, ანუ $\frac{x-30}{v_2}$ წუთის განმავლობაში. ამიტომ გვექნება განტოლება $\frac{30}{v_1}=\frac{x-30}{v_2}$.

ამრიგად, გვაქვს სისტემა:

$$\begin{cases}\frac{45}{v_1}=\frac{x+45}{v_2}\\ \frac{30}{v_1}=\frac{x-30}{v_2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{v_2}{v_1}=\frac{x+45}{45}\\ \frac{v_2}{v_1}=\frac{x-30}{30}\end{cases}\Rightarrow\ \frac{x+45}{45}=\frac{x-30}{30}\ \Rightarrow\ 3x-90=2x+90\Rightarrow\ x=180.$$

პასუხი: 180 მ.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გამოსახა საჭირო ცვლადებით ნინოს მოძრაობის სიჩქარე ან დრო (მაგალითად $\frac{45}{t_1}$ ან $\frac{30}{t_2}$ ან $\frac{45}{v_1}$ ან $\frac{30}{v_1}$), ან მატარებლის საწყისი წერტილის გავლილი მანძილი $x+45$ ან $x-30$;

ბ) მიიღო ორუცნობიანი განტოლებათა სისტემა, საიდანაც შესაძლებელია საჭირო სიდიდის პოვნა (მაგ., $\begin{cases}\frac{45}{t_1}=\frac{30}{t_2}\\ \frac{x+45}{t_1}=\frac{x-30}{t_2}\end{cases}$ ან $\begin{cases}\frac{45}{v_1}=\frac{x+45}{v_2}\\ \frac{30}{v_1}=\frac{x-30}{v_2}\end{cases}$ ან მათი ტოლფასი);

გ) მიიღო ერთუცნობიანი განტოლება;

დ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა.
2 ქულა - ბ.
3 ქულა - ბ, გ.
4 ქულა - ბ, გ, დ.

შენიშვნა. იმ შემთხვევაში, თუ აბიტურიენტმა გამოიცნო პასუხი და შეამოწმა, რომ ის აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს, იწერება 2 ქულა.

(4) 35.

იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $x^2-(a+1)x+4a-8=0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლის თანაკვეთა $(1;5]$ შუალედთან ერთელემენტიანი სიმრავლეა.

ამოხსნა

ვთქვათ $f(x)=x^2-(a+1)x+4a-8$. მაშინ $x^2-(a+1)x+4a-8=0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლის თანაკვეთა $(1;5]$ შუალედთან ერთელემენტიანი იქნება შემდეგ ხუთ შემთხვევაში:

1) $\begin{cases} f(1)<0 \\ f(5)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-8<0 \\ -a+12>0 \end{cases} \Rightarrow a\in\left(-\infty;\dfrac{8}{3}\right).$

2) $\begin{cases} f(1)>0 \\ f(5)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-8>0 \\ -a+12<0 \end{cases} \Rightarrow a\in(12;+\infty).$

3) $f(1)=0 \Rightarrow\ 3a-8=0 \Rightarrow\ a=\dfrac{8}{3}$. ამ დროს $x_1=1,\ x_2=\dfrac{8}{3}$ და $\dfrac{8}{3}\in(1;5]$.

4) $f(5)=0 \Rightarrow -a+12=0 \Rightarrow a=12$. ამ დროს $x_1=5,\ x_2=8$ და $5\in(1;5]$.

5) $\begin{cases} D=0 \\ 1<\dfrac{a+1}{2}\le 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+1)^2-16a+32=0 \\ 1<\dfrac{a+1}{2}\le 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-14a+33=0 \\ 1<a\le 9 \end{cases} \Rightarrow a=3.$

პასუხი: $a\in\left(-\infty;\dfrac{8}{3}\right]\cup[12;+\infty)\cup\{3\}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) ჩაწერა ზემოთ მოყვანილი ამოხსნის 1), 2), 3), 4), 5) შემთხვევებიდან რომელიმე ერთი მათგანის შესაბამისი პირობა ან მოიყვანა შესაბამისი გეომეტრიული სურათი;

ბ) დაადგინა რომ საწყის კვადრატულ განტოლებას აქვს ამონახსნები, როდესაც $a\in(-\infty;3]\cup[11;\infty)$;

გ) წარმოადგინა საწყისი კვადრატული განტოლების ამონახსნები a პარამეტრის საშუალებით;

დ) შეადგინა ერთი სისტემა მაინც, რომელიც უზრუნველყოფს კვადრატული განტოლების ფესვებიდან მხოლოდ ერთის მდებარეობას $(1;5]$ ინტერვალში.

ე) შესაბამისი შემთხვევების განხილვით სიმრავლეებიდან: $\left(-\infty;\dfrac{8}{3}\right)$, $(12;+\infty)$, $\left\{\dfrac{8}{3}\right\}$, $\{12\}$, $\{3\}$ მიიღო რომელიმე ორი;

ვ) შესაბამისი შემთხვევების განხილვით სიმრავლეებიდან: $\left(-\infty;\dfrac{8}{3}\right)$, $(12;+\infty)$, $\left\{\dfrac{8}{3}\right\}$, $\{12\}$, $\{3\}$ მიიღო რომელიმე ოთხი;

ზ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა; ან ბ; ან გ.
2 ქულა - ე; ან გ,დ.
3 ქულა - ა, ვ; ან დ, ვ.
4 ქულა - ა, ვ, ზ; ან დ, ვ, ზ.