შეფასების სქემა

მათემატიკა - დამატებითი სესია

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
გ	ბ	გ	გ	დ	გ	ა	ბ	ა	ა	ბ	გ	ბ	ა

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
ბ	დ	ა	დ	გ	გ	ა	დ	ბ	ა	დ	დ	დ

(2) 28.

ამოხსენით უტოლობა:

$$\frac{x+1}{x+2} > 1.$$

ამოხსნა

$\frac{x+1}{x+2} > 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-x-2}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x+2} > 0$, ე.ი. გვექნება $x+2<0$, საიდანაც $x < -2$.

პასუხი: $x < -2$ $\left(x \in \left(-\infty; -2\right)\right)$

ამოხსნის ეტაპები

ა) მიიღო $\frac{-1}{x+2} > 0$ ან მისი ტოლფასი უტოლობა;

ბ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა;
2 ქულა - ა, ბ.

(2) 29.

რამდენ პროცენტიანი მარილხსნარი მიიღება 1 კგ 10%-იანი მარილხსნარისა და 2 კგ 20%-იანი მარილხსნარის შერევით?

ამოხსნა

1 კგ 10%-იანი მარილხსნარი შეიცავს $1\cdot\frac{10}{100}=0,1$ კგ მარილს, ხოლო 2 კგ 20%-იანი მარილხსნარი შეიცავს $2\cdot\frac{20}{100}=0,4$ კგ მარილს. ამ მარილხსნარების შერევით მიიღება 3 კგ მარილხსნარი, რომელიც შეიცავს $0,4+0,1=0,5$ კგ მარილს. ე.ი. მიიღება $\frac{0,5}{3}\cdot 100\%=\frac{50}{3}\%$ -იანი მარილხსნარი.

პასუხი: $\frac{50}{3}\%$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) ერთ-ერთ ხსნარში იპოვა მარილის შემცველობა. (მაგ., 1 კგ 10%-იანი მარილხსნარი შეიცავს $0,1$ კგ მარილს);

ბ) პასუხი.

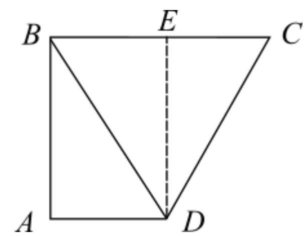
შეფასების სქემა

1 ქულა - ა;
2 ქულა - ა, ბ.

(3) 30.

$ABCD$ მართკუთხა ტრაპეციაში $AD \parallel BC$, ხოლო BCD ტოლგვერდა სამკუთხედია. იპოვეთ $ABCD$ ტრაპეციის ფართობი, თუ BCD სამკუთხედის ფართობი S-ის ტოლია.

ამოხსნა



D წვეროდან BC ფუძეზე დავუშვათ DE მართობი. $\triangle BDE = \triangle CDE$, $\triangle BDE = \triangle CDE = \triangle ABD$, ამიტომ $S_{ABCD} = 3S_{BDE} = \frac{3}{2}S_{BCD} = \frac{3}{2}S$

პასუხი: $S_{ABCD} = \frac{3}{2}S$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) აღნიშნა, რომ $\triangle BDE = \triangle CDE$;

ბ) აღნიშნა, რომ $\triangle BDE = \triangle ABD$;

გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა: ა ან ბ;

2 ქულა: ა, ბ;

3 ქულა: ა, ბ, გ.

(3) 31.

a_n არითმეტიკულ პროგრესიაში $a_1 = -31$ და $d = \frac{3}{2}$. იპოვეთ ამ პროგრესიის ყველა უარყოფითი წევრის ჯამი.

ამოხსნა

ვიპოვოთ ამ პროგრესიის უარყოფით წევრთა რაოდენობა.

$a_n = a_1 + d(n-1) < 0$ თუ ამ უტოლობაში შევიტანთ a_1 და d -ს შესაბამის მნიშვნელობებს მივიღებთ: $-31 + \frac{3}{2}(n-1) < 0 \Leftrightarrow n < 21\frac{2}{3}$. ე.ი. ამ არითმეტიკულ პროგრესიაში სულ არის 21 უარყოფითი წევრი, რომელთა ჯამი გამოითვლება ფორმულით: $S_{21} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \Leftrightarrow$

$S_{21} = \left(-62 + \frac{3}{2} \cdot 20\right) \cdot 21/2 = -336$.

პასუხი: -336.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაწერა უტოლობა $-31 + \frac{3}{2}(n-1) < 0$; ან დაწერა განტოლება $-31 + \frac{3}{2}(n-1) = 0$; ან იპოვა ამ პროგრესიის უდიდესი უარყოფითი წევრის რიცხვითი მნიშვნელობა (-1);

ბ) იპოვა უდიდესი უარყოფითი წევრის ნომერი $n = 21$;

გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა;

2 ქულა - ა, ბ;

3 ქულა - ა, ბ, გ.

(3) 32.

იპოვეთ x -ის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $\vec{a}(x-1;\ 2x)$ ვექტორის სიგრძე ნაკლებია 3-ზე.

ამოხსნა

$\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე გამოვსახოთ x -ის საშუალებით: $|\vec{a}|=\sqrt{(x-1)^2+(2x)^2}$. რადგან $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე ნაკლებია 3-ზე გვექნება: $\sqrt{(x-1)^2+(2x)^2}<3 \Leftrightarrow (x-1)^2+(2x)^2<9$.
მივიღებთ: $5x^2-2x+1<9$.

$$5x^2-2x-8<0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{41}}{5}<x<\frac{1+\sqrt{41}}{5}$$

პასუხი: $\frac{1-\sqrt{41}}{5}<x<\frac{1+\sqrt{41}}{5}$.

ამოხსნის ეტაპები

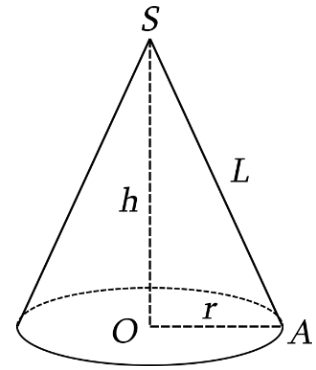
ა) $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე გამოსახა x -ის საშუალებით (მაგ. $|\vec{a}|=\sqrt{(x-1)^2+(2x)^2}$);
ბ) დაწერა უტოლობა $5x^2-2x-8<0$;
გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა- ა;
2 ქულა- ა, ბ;
3 ქულა- ბ, გ.

(3) 33.
კონუსის გვერდითი ზედაპირის შლილი ნახევარწრეს წარმოადგენს, რომლის რადიუსი L -ის ტოლია. რას უდრის ამ კონუსის მოცულობა?

ამოხსნა



კონუსის შლილი წარმოადგენს წრიულ სექტორს, რომლის რადიუსი ემთხვევა კონუსის მსახველის სიგრძეს, ხოლო რკალის სიგრძე - კონუსის ფუძის წრეწირის სიგრძეს. ამიტომ თუ კონუსის ფუძის რადიუსს აღვნიშნავთ r -ით, მივიღებთ განტოლებას $2\pi r = \pi L$, $r = \frac{L}{2}$. ვთქვათ O კონუსის ფუძის ცენტრია, ხოლო A- ფუძის წრეწირის წერტილი. მაშინ $\triangle SOA$ მართკუთხა სამკუთხედია SOA მართი კუთხით, ამიტომ და კონუსის მოცულობა $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi L^3}{8\sqrt{3}}$

.

პასუხი: $V = \frac{\pi L^3}{8\sqrt{3}}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დააკავშირა კონუსის მსახველი და ფუძის რადიუსი (მაგალითად, დაწერა $L = 2r$);

ბ) გამოთვალა კონუსის სიმაღლე მსახველის სიგრძის და ფუძის რადიუსის საშუალებით ($h = \sqrt{L^2 - r^2}$);

გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა: ა ან ბ;

2 ქულა: ა, ბ;

3 ქულა: ა, ბ, გ.

(4) 34.

20 დეტალის დასამზადებლად პირველ ხარატს 2 სთ-ით ნაკლები დრო სჭირდება, ვიდრე მეორე ხარატს 16 ასეთივე დეტალის დასამზადებლად. რა დრო დასჭირდება ორივე ხარატს ერთად მუშაობისას 70 ასეთი დეტალის დასამზადებლად, თუ ცნობილია, რომ 6 სთ-ში პირველი ხარატი 1 დეტალით მეტს ამზადებს, ვიდრე მეორე?

1 ამოხსნა

ვთქვათ პირველი ხარატი ყოველ საათში x დეტალს, ხოლო მეორე ხარატი y დეტალს ამზადებს, მაშინ 6 საათში პირველი ხარატი $6x$ დეტალს, ხოლო მეორე ხარატი $6y$ დეტალს დაამზადებს, ამიტომ $6x-6y=1$. პირველი ხარატი 20 დეტალს დაამზადებს $\frac{20}{x}$ საათში, ხოლო მეორე ხარატი 16 დეტალს დაამზდებს $\frac{16}{y}$ საათში. ამოცანის პირობის თანახმად $\frac{16}{y}-\frac{20}{x}=2$. ვღებულობთ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} 6x-6y=1 \\ \frac{16}{y}-\frac{20}{x}=2 \end{cases}$$

პირველი განტოლებიდან $y=\frac{6x-1}{6}$. მისი ჩასმა მეორე განტოლებში გვაძლევს $\frac{96}{6x-1}-\frac{20}{x}=2$. ამ განტოლების გამარტივების შედეგად ვღებულობთ $6x^2+11x-10=0$. მისი ამოხსნა გვაძლევს $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{15}{6}$. უარყოფითი ფესვი $x_2=-\frac{15}{6}$ ამოცანის პირობას არ აკმაყოფილებს. ამიტომ $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{6x-1}{6}=\frac{1}{2}$. ე.ი. პირველი ხარატი t საათში დაამზადებს $\frac{2t}{3}$ დეტალს, ხოლო მეორე ხარატი $\frac{t}{2}$ დეტალს. თუ ისინი t საათში ერთად დაამზადებენ 70 დეტალს, მაშინ $\frac{2t}{3}+\frac{t}{2}=70$. საიდანაც $t=60$.

პასუხი: 60 საათი.

2 ამოხსნა

ვთქვათ პირველ ხარატს ერთი დეტალის დასამზადებლად სჭირდება x საათი, ხოლო მეორე ხარატს - y საათი. მაშინ პირველი ხარატი 20 დეტალს დაამზადებს $20x$ საათში, ხოლო მეორე ხარატი 16 დეტალს დაამზადებს $16y$ საათში. ვღებულობთ განტოლებას $16y-20x=2$.

პირველი ხარატი 6 საათში ამზადებს $\frac{6}{x}$ დეტალს, ხოლო მეორე ხარატი ამზადებს $\frac{6}{y}$ დეტალს. პირობის თანახმად $\frac{6}{x}-\frac{6}{y}=1$. ვღებულობთ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases}16y-20x=2\\ \frac{6}{x}-\frac{6}{y}=1\end{cases}$$

პირველი განტოლებიდან $y=\frac{10x+1}{8}$. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა სისტემის მეორე განტოლებაში, მივიღებთ $\frac{6}{x}-\frac{48}{10x+1}=1$, საიდანაც $10x^2-11x-6=0$ ამ განტოლების ამოხსნა გვაძლევს $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=-\frac{2}{5}$. უარყოფითი ფესვი $x_2=-\frac{2}{5}$ ამოცანის პირობას არ აკმაყოფილებს. ამიტომ $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{10x+1}{8}=2$. მაშასადამე, t საათში პირველი ხარატი დაამზადებს $\frac{t}{x}=\frac{2t}{3}$ დეტალს, მეორე ხარატი - $\frac{t}{y}=\frac{t}{2}$ დეტალს, ხოლო ორივე ხარატი - $\frac{2t}{3}+\frac{t}{2}=70$ დეტალს, საიდანაც $t=60$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) შემოიღო საჭირო ცვლადები (მაგალითად, ერთ საათში თითოეული ხარატის მიერ დამზადებული დეტალების რაოდენობები) და შეადგინა ერთი ორუცნობიანი განტოლება (მაგალითად, $6x-6y=1$);

ბ) შემოღებული ცვლადების მიმართ შეადგინა ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა, საიდანაც შეიძლება ცვლადების მნიშვნელობების განსაზღვრა;

გ) ამოხსნა მიღებული ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა;

დ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა: ა;
2 ქულა: ა, ბ;
3 ქულა: ა, ბ, გ;
4 ქულა: ა, ბ, გ, დ.

(4) 35.

იპოვეთ k ნამდვილი პარამეტრის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $\sqrt{kx} = x+3$ განტოლებას გააჩნია ორი, ერთმანეთისგან განსხვავებული, ნამდვილი ფესვი.

ამოხსნა 1

განვიხილოთ შემთხვევები 1) $k \geq 0$ და 2) $k < 0$.

1) ვთქვათ $k \geq 0$, მაშინ $\sqrt{kx} = x+3 \Leftrightarrow x - \sqrt{k} \cdot \sqrt{x} + 3 = 0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $t = \sqrt{x}$, მაშინ მივიღებთ განტოლებას $t^2 - \sqrt{k} \cdot t + 3 = 0$. საწყის განტოლებას ექნება ორი ერთმანეთისგან განსხვავებული ნამდვილი ფესვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $t^2 - \sqrt{k} \cdot t + 3 = 0$ განტოლებას ექნება ორი ერთმანეთისგან განსხვავებული არაუარყოფითი ფესვი, ამიტომ უნდა შესრულდეს პირობები:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{k}\right)^2 - 4 \cdot 3 > 0 \\ \sqrt{k} > 0 \\ 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow k > 12 \; .$$

2) ვთქვათ $k < 0$. მაშინ $\sqrt{kx} = x+3 \Leftrightarrow -(-x) - \sqrt{-k} \cdot \sqrt{-x} + 3 = 0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $t = \sqrt{-x}$. მაშინ მივიღებთ განტოლებას $t^2 + \sqrt{-k} \cdot t - 3 = 0$. საწყის განტოლებას ექნება ორი ერთმანეთისგან განსხვავებული ნამდვილი ფესვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $t^2 + \sqrt{-k} \cdot t - 3 = 0$ განტოლებას ექნება ორი ერთმანეთისგან განსხვავებული არაუარყოფითი ფესვი, ამიტომ უნდა შესრულდეს პირობები:

$$\begin{cases} (\sqrt{-k})^2 + 4 \cdot 3 > 0 \\ -\sqrt{-k} > 0 \\ -3 > 0 \end{cases} \Rightarrow k \in \varnothing \; .$$

პასუხი: $k \in \left(12; +\infty\right)$.

ამოხსნა 2

შევნიშნოთ, რომ $k = 0$ არ აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას. ვთქვათ $k \neq 0$. მაშინ $\sqrt{kx} = x+3 \Leftrightarrow kx - k\sqrt{kx} + 3k = 0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $t = \sqrt{kx}$. მაშინ მივიღებთ განტოლებას $t^2 - k \cdot t + 3k = 0$. საწყის განტოლებას ექნება ორი ერთმანეთისგან განსხვავებული ნამდვილი ფესვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $t^2 - k \cdot t + 3k = 0$

განტოლებას ექნება ორი ერთმანეთისგან განსხვავებული არაუარყოფითი ფესვი, ამიტომ უნდა შესრულდეს პირობები:

$$\begin{cases} k^2-4\cdot 3k>0 \\ k>0 \\ 3k>0 \end{cases} \Rightarrow k>12 .$$

პასუხი: $k\in(12;+\infty)$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) განიხილა შესაბამისი შემთხვევა და მიიღო განტოლება $x-\sqrt{k}\cdot\sqrt{x}+3=0$ ან $-(-x)-\sqrt{-k}\cdot\sqrt{-x}+3=0$, ან $kx-k\sqrt{kx}+3k=0$;

ბ) შემოიღო აღნიშვნა $t=\sqrt{x}$ და მიიღო განტოლება $t^2-\sqrt{k}\cdot t+3=0$;
ან შემოიღო აღნიშვნა $t=\sqrt{-x}$ და მიიღო განტოლება $t^2+\sqrt{-k}\cdot t-3=0$;
ან შემოიღო აღნიშვნა $t=\sqrt{kx}$ და მიიღო განტოლება $t^2-k\cdot t+3k=0$;

გ) შესაბამის შემთხვევაში k პარამეტრის მიმართ ჩაწერა აუცილებელი და საკმარისი პირობა, როდესაც საწყის განტოლებას აქვს ორი ერთმანეთისგან განსხვავებული ნამდვილი ფესვი;

დ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა; ან ბ.
2 ქულა - ა, ბ.
3 ქულა - ა, ბ, გ.
4 ქულა - ა, ბ, გ, დ.