

НАЦИОНАЛЬНАЯ УЧЕБНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

2021 - 2022 УЧЕБНЫЙ ГОД

II ТУР

XI-XII КЛАСС

---

**Задача 1**

**5 баллов**

Пусть  $n$  натуральное число, имеющее свойство: при делении  $n^2$  на  $2n+1$  в остатке остается 1000. Найдите все такие натуральные числа.

---

**Задача 2**

**5 баллов**

Для каждой пары действительных чисел  $(x; y)$  действительное число  $x * y$  определено так, что выполняются условия:

а)  $x * x = 0$  - для каждого действительного числа  $x$ ;

б)  $x * (y * z) = (x * (5y)) + 25z$  - для всех действительных чисел  $x, y$  и  $z$ .

Чему равно  $2022 * 1000$ .

---

**Задача 3**

**5 баллов**

Дана последовательность  $(a_n)$ , у которой  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$  и

$$a_{n+1} = \frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_{n-1}}, \quad \text{при } n \in N \text{ и } n \geq 2.$$

Найдите  $a_{2022}$ .

---

**5 баллов**

**Задача 4**

В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = AC$  и  $\angle BAC > 90^\circ$ . Из точки  $D$ , взятой на основании  $BC$  треугольника  $ABC$ , проведен перпендикуляр к прямой  $AB$ . Основанием перпендикуляра является точка  $K$  и находится на отрезке  $AB$ , также известно, что периметры треугольника  $BKD$  и четырехугольника  $DKAC$  равны. Найдите отношение площадей треугольника  $BKD$  и четырехугольника  $DKAC$ .

---

**Задача 5**

**5 баллов**

Длина стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  равна  $\frac{3}{11}$  части периметра этого треугольника. На стороне  $AC$  взята точка  $D$  так, что  $AC = 4AD$ . На сторонах  $AB$  и  $AC$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причем  $KL \parallel BC$  и  $KL$  касается окружности вписанной в треугольник  $ABC$ . В каком отношении делит точка пересечения отрезков  $BD$  и  $KL$  отрезок  $KL$ ?