

2022 – 2023 სასწავლო წლის ეროვნული ოლიმპიადა მათემატიკაში
დასკვნითი ტური
XI-XII კლასი

ამოცანა 1

5 ქულა

იპოვეთ არაუარყოფითი მთელი რიცხვების ყველა $(m; n)$ წყვილი, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას $2023^m = n^4 - 8n + 1$.

ამოცანა 2

5 ქულა

დაამტკიცეთ, რომ ყოველი მთელი დადებითი m და n რიცხვებისთვის სამართლიანია უტოლობა $\frac{(m+n)!}{m!n!} > mn$.
(ჩანაწერი $k!$ ნიშნავს 1-დან k -ს ჩათვლით ნატურალური რიცხვების ნამრავლს, ანუ $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$)

ამოცანა 3

5 ქულა

ABC მახვილკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრია O წერტილი. M არის BC გვერდის შუაწერტილი, ხოლო K არის ABC სამკუთხედის C კუთხის ბისექტრისის ამ სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირთან მეორე გადაკვეთის წერტილი. K წერტილზე BC წრფის პარალელურად გავლებულია წრფე, რომელიც AB წრფეს კვეთს E წერტილში. ცნობილია, რომ $BE = BO$. იპოვეთ KMB კუთხის სიდიდე.

ამოცანა 4

5 ქულა

ABC მახვილკუთხა სამკუთხედში $BC < AC < AB$. D, E და F წერტილები არიან შესაბამისად A, B და C წვეროებიდან მოპირდაპირე გვერდებისადმი გავლებული სიმაღლეების ფუძეები. F წერტილზე გავლებულია DE წრფის პარალელური წრფე, რომელიც BC წრფეს კვეთს M წერტილში. MFE კუთხის ბისექტრისა DE წრფეს კვეთს L წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ თუ B წერტილი არის FML სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი, მაშინ F წერტილი იქნება DML სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი.

ამოცანა 5

5 ქულა

ვთქვათ $c \geq 2023$ არის რაიმე ნამდვილი რიცხვი. მოცემულია 2023 ყუთი. თითოეულ მათგანში ჩალაგებულია ბურთები (შესაძლოა არა ერთი და იგივე რაოდენობით). ყოველი ბურთისთვის არსებობს მისი შესაბამისი ისეთი მთელი რიცხვი k , რომ ბურთის წონა უდრის c^k -ს. ყოველ ცალკეულ ყუთში ჩალაგებული ბურთების წონების ჯამი არის ერთი და იგივე. განვიხილოთ ყველა ყუთში ჩალაგებული ბურთების სიმრავლე. ვთქვათ ამ სიმრავლეში ყოველი ერთნაირი წონის მქონე ბურთების რაოდენობა არ აღემატება b -ს. იპოვეთ b -ს უმცირესი შესაძლო მნიშვნელობა.