ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში

2024-25 სასწავლო წელი

III ტური   X კლასი

ამოცანა 1 **5 ქულა**

იპოვეთ მთელ რიცხვთა ყველა სამეული $(x;\, y;\, z)$, რომლებიც აკმაყოფილებენ ტოლობას $x^2\left(1-y^2\right)+y^2+z^2=0$.

ამოხსნა

საწყისი განტოლება გადავწეროთ $x^2+y^2+z^2=x^2y^2$ ფორმით. რიცხვის სრული კვადრატი 4-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს 0-ს ან 1-ს. თუ $x^2y^2\equiv 1 \bmod(4)$, მაშინ x და y კენტი რიცხვებია. მაშინ, $x^2+y^2+z^2$ სადარია ან 2-ის, ან 3-ის მოდულით 4. რაც წინააღმდეგობაა. ე.ი. $x^2y^2\equiv 0 \bmod(4)$. თუ x და y რიცხვებიდან ერთ-ერთი ლუწია, ხოლო მეორე კენტი, მაშინ $x^2+y^2+z^2$ სადარია ან 2-ის, ან 1-ის მოდულით 4. რაც ასევე წინააღმდეგობაა. მაშასადამე, სამივე რიცხვი x, y და z ლუწი რიცხვია.

ვთქვათ, $x=2x_1$, $y=2y_1$ და $z=2z_1$. მაშინ, საწყის განტოლებაში ჩასმის შედეგად მივიღებთ: $x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2=4x_1{}^2y_1{}^2$. ანალოგიური მსჯელობით დავასკვნით, რომ სამივე რიცხვი x_1, y_1 და z_1 ლუწი რიცხვია. კვლავ შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $x_1=2x_2$, $y_1=2y_2$ და $z_1=2z_2$. ამ ტოლობების წინა განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ: $x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2=16x_2{}^2y_2{}^2$. რადგან მარჯვენა მხარე უნაშთოდ იყოფა 4-ზე, ამიტომ დავასკვნით, რომ x_2, y_2 და z_2 ლუწი რიცხვებია. ეს პროცესი უსასრულოდ გაგრძელდება.

ე.ი. ვღებულობთ, რომ თუ x, y და z აკმაყოფილებს საწყის განტოლებას, მაშინ ეს რიცხვები იყოფა 2^n რიცხვზე, ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის. ამ თვისებას აკმაყოფილებს, მხოლოდ ერთი რიცხვი - 0. ე.ი. $x=y=z=0$.

პასუხი: $(0;\,0;\,0)$.

ამოცანა 2 **5 ქულა**

x და y დადებითი რიცხვები აკმაყოფილებენ ტოლობებს: $x^n = x+1$ და $y^{2n} - y = 3x$, სადაც n ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია და $n > 1$. იპოვეთ x და y რიცხვებს შორის უმცირესი.

ამოხსნა

რადგან $x > 0$, ამიტომ $x^n = x+1 \Rightarrow x^n > 1$ და მაშასადამე, $x > 1$. აქედან, $x^2 + 1 > 2x$.

$x^{2n} = \left(x+1\right)^2 = x^2 + 2x + 1 > 2x + 2x = 4x$.

$$\frac{y^{2n}}{x^{2n}} = \frac{y+3x}{x^{2n}} < \frac{y+3x}{4x}.$$

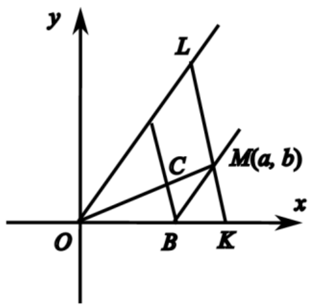
დავუშვათ, $y \ge x$. მაშინ, $\frac{y^{2n}}{x^{2n}} < \frac{y+3x}{4x} \le \frac{y+3y}{4x} = \frac{y}{x}$. ანუ,

$\frac{y^{2n-1}}{x^{2n-1}} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^{2n-1} < 1 \Rightarrow \frac{y}{x} < 1$. რაც ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას. ე.ი. $y < x$.

პასუხი: y .

Oxy საკოორდინატო სიბრტყეში გავლებულია OA სხივი, რომელიც აბსცისათა დადებით ნახევარღერძთან ქმნის α სიდიდის მახვილ კუთხეს. ამ მახვილი კუთხის შიგნით აღებულია $M(a;\, b)$ წერტილი, სადაც a და b მოცემული დადებითი რიცხვებია. გამოთვალეთ $\frac{1}{ML}+\frac{1}{MK}$ ჯამის შესაძლო უდიდესი მნიშვნელობა, სადაც L და K წერტილები შესაბამისად არის M წერტილზე გამავალი წრფის გადაკვეთის წერტილები OA სხივთან და აბსცისათა დადებით ნახევარღერძთან.

ამოხსნა



M წერტილზე გავავლოთ OA წრფის პარალელური წრფე. ამ წრფის გადაკვეთის წერტილი აბსცისათა ღერძთან აღვნიშნოთ B ასოთი. B წერტილზე გავავლოთ KL წრფის პარალელური წრფე, რომელიც OM წრფეს კვეთს C წერტილში. OCB და OMK სამკუთხედები მსგავსია, ამიტომ $\frac{CB}{MK}=\frac{OC}{OM}$. $\angle LOM=\angle BMC$ და $\angle OLM=\angle CBM$, ამიტომ CBM და MLO სამკუთხედები მსგავსია. ე.ი. $\frac{CB}{LM}=\frac{CM}{OM}$.

ამ შეფარდებების შეკრების შედეგად ვღებულობთ: $\frac{CB}{MK}+\frac{CB}{LM}=\frac{OC}{OM}+\frac{CM}{OM}=1$.

ე.ი. $\frac{1}{ML}+\frac{1}{MK}=\frac{1}{CB}$. ამ უკანასკნელი ტოლობიდან ნათელია, რომ $\frac{1}{ML}+\frac{1}{MK}$ ჯამი იღებს შესაძლო უდიდეს მნიშვნელობას, მაშინ, როდესაც CB იღებს შესაძლო უმცირეს მნიშვნელობას. ეს მიიღწევა მაშინ, როდესაც $BC\perp OM$. მაშასადამე, საძიებელი LK წრფე მართობულია OM წრფის.

$\angle MBK=\alpha$, $OB=a-b\operatorname{ctg}\alpha$. $\angle MOB$-ს სიდიდე აღვნიშნოთ β-თი. მაშინ, $\sin\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ და OCB მართკუთხა სამკუთხედიდან $CB=OB\sin\beta=\frac{b(a-b\operatorname{ctg}\alpha)}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

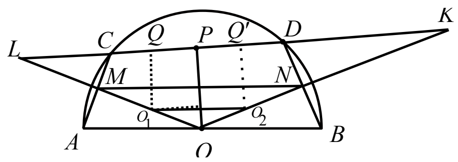
მაშინ, ზემოთ მოყვანილი დასაბუთებიდან ვღებულობთ: $\frac{1}{ML}+\frac{1}{MK}$ ჯამის უდიდესი შესაძლო მნიშვნელობა არის $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b(a-b\operatorname{ctg}\alpha)}$.

პასუხი: $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b(a-b\operatorname{ctg}\alpha)}$.

O ცენტის და AB დიამეტრის მქონე ნახევარწრეწირზე აღებულია C და D წერტილები ისე, რომ D წერტილი მდებარეობს BC რკალზე. M, P და N წერტილები შესაბამისად წარმოადგენენ AC, CD და DB ქორდების შუაწერტილებს. ACP და BDP სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირების ცენტრები არის შესაბამისად O_1 და O_2 წერტილები. დაამტკიცეთ, რომ $MN \| O_1O_2$.

ამოხსნა

O_1 წერტილი წარმოადგენს OM მონაკვეთის და CP მონაკვეთის Q შუაწერტილზე გამავალი შუამართობის თანაკვეთის წერტილს. ანალოგიურად, O_2 წერტილი წარმოადგენს ON მონაკვეთის და PD მონაკვეთის Q' შუაწერტილზე გამავალი შუამართობის თანაკვეთის წერტილს (იხ. სურათი).



შემოვიტანოთ აღნიშვნები: $\angle AOM = \alpha$, $\angle BON = \beta$, $OA = R$. მაშინ, $OM = R\cos\alpha$ და $ON = R\cos\beta$. CD წრფის თანაკვეთის წერტილები OM და ON სხივებთან შესაბამისად აღვნიშნოთ L და K ასოებით. ODC ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხე ტოლია $180° - (2\alpha + 2\beta)$. მაშინ $\angle ODC = \angle OCD = \alpha + \beta$. $\angle OCD$ არის OLC სამკუთხედის გარე კუთხე. ამიტომ, $\angle CLO = \angle OCD - \angle COL = \alpha + \beta - \alpha = \beta$ ანუ $\angle CLO = \angle NOB$. ანალოგიურად, $\angle DKO = \alpha$ ანუ $\angle DKO = \angle AOM$.

თუ O_1 და O_2 წერტილებიდან დავუშვებთ მართობებს PO მონაკვეთზე, მიღებული მართკუთხა სამკუთხედებიდან გამოვთვლით: $OO_1 = \dfrac{PQ}{\cos\beta}$ და $OO_2 = \dfrac{PQ'}{\cos\alpha} = \dfrac{PQ}{\cos\alpha}$. მაშინ,

$\dfrac{OM}{OO_1} = \dfrac{R\cos\alpha\cos\beta}{PQ} = \dfrac{ON}{OO_2}$. ე.ი. $MN \| O_1O_2$.

$f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ არის არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია თვისება: თუ $|x-y| \in \{5;\, 7;\, 12\}$, მაშინ $f(x) \neq f(y)$. ელემენტების რა უმცირეს რაოდენობას შეიძლება შეიცავდეს ამ თვისების მქონე ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე?

ამოხსნა

შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $f(0)=a,\ f(5)=b,\ f(12)=c$. ამოცანის პირობის თანახმად a, b და c რიცხვები წყვილ-წყვილად განსხვავებული რიცხვებია. ამიტომ, ამ ტიპის ყოველი ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე შეიცავს 3 ელემენტს მაინც.

ვაჩვენოთ რომ არ არსებობს ამ თვისების მქონე ფუნქცია, რომელის მნიშვნელობათა სიმრავლე ზუსტად 3 ელემენტს შეიცავს. დამტკიცება წარვმართოთ საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით. ვთქვათ არსებობს ისეთი ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\{a,b,c\}$. მაშინ, ამ ფუნქციისათვის $f(7) \neq a$ და $f(7) \neq c$, ე.ი. $f(7)=b$. ამ ფუნქციისათვის ცალსახად არის განსაზღვრული შემდეგი მნიშვნელობები:

$$f(7)=b \Rightarrow f(17)=a \Rightarrow f(10)=c \Rightarrow f(22)=b \Rightarrow f(15)=a \Rightarrow f(24)=b \Rightarrow f(19)=a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(14)=c \Rightarrow f(2)=a \Rightarrow f(9)=b \Rightarrow f(21)=a \Rightarrow f(16)=c \Rightarrow f(4)=a \Rightarrow f(11)=b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(23)=a \Rightarrow f(18)=c \Rightarrow f(30)=b \Rightarrow f(25)=a \Rightarrow f(13)=b \Rightarrow f(20)=c$$

$f(8)$ შეუძლებელია იყოს a-ს ტოლი, რადგან $f(15)=a$ და 15-8=7. ანალოგიურად, $f(8)$ შეუძლებელია იყოს b-ს ტოლი, რადგან $f(13)=b$ და 13-8=5. ასევე, $f(8)$ შეუძლებელია იყოს c-ს ტოლი, რადგან $f(20)=c$ და 20-8=12.

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ არ არსებობს ამ თვისების მქონე ფუნქცია, რომელის მნიშვნელობათა სიმრავლე ზუსტად 3 ელემენტს შეიცავს.

ახლა ავაგოთ მოცემული თვისების მქონე ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლე შედგება 4 ელემეტისაგან.

$\mathbb{N}_0$ სიმრავლე დავშალოთ ოთხ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ქვესიმრავლედ.

სიმრავლე A_1 იყოს იმ არაურაყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც 24-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს ან 1-ს, ან 3-ს, ან 5-ს, ან 7-ს, ან 9-ს, ან 11-ს.

A_2 იყოს იმ არაურაყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც 24-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს ან 13-ს, ან 15-ს, ან 17-ს, ან 19-ს, ან 21-ს, ან 23-ს.

A_3 იყოს იმ არაურაყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც 24-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს ან 2-ს, ან 4-ს, ან 6-ს, ან 8-ს, ან 10-ს, ან 12-ს.

A_4 იყოს იმ არაურაყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც 24-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს ან 0-ს, ან 14-ს, ან 16-ს, ან 18-ს, ან 20-ს, ან 22-ს.

ავიღოთ წყვილ-წყვილად განსხვავებული 4 არაუარყოფითი მთელი რიცხვი d_1, d_2, d_3 და d_4. f ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: $f(x)=d_i$, თუ $x \in A_i$, სადაც $i=1,2,3,4$. შევნიშნოთ, რომ თუ $x \in A_i$, მაშინ $x \pm 5,\ x \pm 7, x \pm 12$ რიცხვები არ ეკუთვნის A_i-ს, $i=1,2,3,4$. ე.ი. f აკმაყოფილებს მისთვის წაყენებული პირობას.

პასუხი: 4.