

შეფასების სქემა

მათემატიკა - II ვარიანტი

შენიშვნა. ქვემოთ, შეფასების სქემის სტრუქტურული ერთეულის „ამოხსნის ეტაპები“-ს პუნქტ „პასუხი“ -ს ქვეშ გაიგება პასუხის დასაბუთებით მიღება.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
დ	ბ	დ	ბ	ბ	ბ	ბ	დ	ბ	ბ	ბ	ბ	ა	ბ	ბ

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ა	ბ	დ	დ	დ	ა	ბ	დ	ბ	ა	ა	ა	ა	დ	დ

31	32	33	34	35	36	37
ბ	ბ	ბ	ა	ბ	ბ	ა

შენიშვნა. ქვემოთ, შეფასების სქემის სტრუქტურული ერთეულის „ამოხსნის ეტაპები“-ს პუნქტ „პასუხი“-ს ქვეშ გაიგება პასუხის დასაბუთებით მიღება.

(3) 38. იპოვეთ a და b რიცხვები, თუ ცნობილია, რომ $f(x) = ax^2 + bx + 4$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა არის 9 და $f(-3) = f(5)$.

ამოხსნა

მოცემული ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $x = -\frac{b}{2a}$ წრფის მიმართ და რადგან $f(-3) = f(5)$,

ამიტომ წეროს აბსცისა ტოლია $x_0 = \frac{5-3}{2} = 1$, ე.ი. ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა მიიღწევა

$x_0 = 1$ წერტილში (თუ $a < 0$) და 9-ის ტოლია. მაშინ $f(1) = a + b + 4 = 9$ და $-\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow b = -2a$.

მივიღეთ სისტემა:
$$\begin{cases} b = -2a \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 10 \end{cases}$$

პასუხი: $a = -5$ და $b = 10$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გამოთვალა პარაბოლის წეროს აბსცისა; ან დაწერა კავშირი a და b პარამეტრებს შორის (მაგ. $9a - 3b + 4 = 25a + 5b + 4$; ან $b^2 = -20a$)

ბ) შეადგინა a და b პარამეტრების მიმართ ორი განტოლება, რომელთა დახმარებით შესაძლებელია a -ს და b -ს პოვნა (მაგ. $b = -2a$ და $a + b = 5$);

გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა.

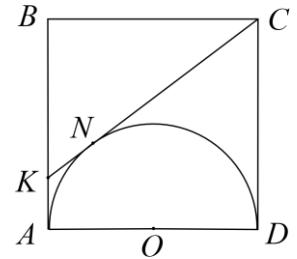
2 ქულა - ბ.

3 ქულა - ბ, გ.

შენიშვნა. ქვემოთ, შეფასების სქემის სტრუქტურული ერთეულის „ამოხსნის ეტაპები“-ს პუნქტ „პასუხი“ -ს ქვეშ გაიგება პასუხის დასაბუთებით მიღება.

(3) 39.

$ABCD$ კვადრატის AD გვერდზე, როგორც დიამეტრზე აგებულია ნახევარწრეწირი. C წერტილიდან ნახევარწრეწირისადმი გავლებული მხები კვადრატის AB გვერდს კვეთს K წერტილში (იხ. სურათი). იპოვეთ AK მონაკვეთის სიგრძე, თუ კვადრატის გვერდის სიგრძე 12 სმ-ის ტოლია.



ამოხსნა

ერთი წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებული მხებების თვისების თანახმად $AK = KN$ და $CD = CN = 12$. აღნიშნოთ AK მონაკვეთის სიგრძე x სმ-ით, მაშინ CBK სამკუთხედში $BK = 12 - x$ და $KC = x + 12$. პითაგორას თეორემის თანახმად $(12 - x)^2 + 12^2 = (x + 12)^2$, მივიღებთ $x = 3$.

პასუხი: $AK = 3$ სმ.

ამოხსნის ეტაპები

- ა) აღნიშნა, რომ $AK = KN$; ან $CD = CN$; ან $ON \perp KC$; ან დაადგინა, რომ $\angle KOC$ მართია;
- ბ) დაწერა განტოლება საიდანაც შესაძლებელია საძიებელი მონაკვეთის სიგრძის პოვნა (მაგ. $(12 - x)^2 + 12^2 = (x + 12)^2$, $12x = 36$);
- გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა.

2 ქულა - ა, ბ.

3 ქულა - ა, ბ, გ.

შენიშვნა. ქვემოთ, შეფასების სქემის სტრუქტურული ერთეულის „ამოხსნის ეტაპები“-ს პუნქტ „პასუხი“-ს ქვეშ გაიგება პასუხის დასაბუთებით მიღება.

(4) 40.

მუდმივი სიჩქარეებით მოძრავი ველოსიპედისტებიდან პირველი ყოველი საათის განმავლობაში გადიოდა 3 კილომეტრით მეტ მანძილს, ვიდრე მეორე. შედეგად პირველმა ველოსიპედისტმა 36 კილომეტრი გაიარა ერთი საათით ნაკლებ დროში, ვიდრე მეორემ გაიარა 45 კილომეტრი. იპოვეთ ველოსიპედისტების სიჩქარეები.

ამოხსნა 1

ვთქვათ მეორე ველოსიპედისტის სიჩქარე არის x კმ/სთ. ვინაიდან პირველი ყოველი საათის განმავლობაში გადიოდა 3 კილომეტრით მეტ მანძილს, ვიდრე მეორე, ამიტომ პირველი ველოსიპედისტის სიჩქარე იქნება $(x+3)$ კმ/სთ. პირველი ველოსიპედისტი 36 კილომეტრს გაივლის $\frac{36}{x+3}$ საათში, ხოლო მეორე ველოსიპედისტი 45 კილომეტრს გაივლის $\frac{45}{x}$ საათში. რადგან პირველმა ველოსიპედისტმა 36 კილომეტრი გაიარა ერთი საათით ნაკლებ დროში, ვიდრე მეორემ გაიარა 45 კილომეტრი, ამიტომ გვექნება განტოლება $\frac{45}{x} - \frac{36}{x+3} = 1$.

გვაქვს

$$\frac{45}{x} - \frac{36}{x+3} = 1 \Rightarrow x^2 + 3x = 45x + 135 - 36x \Rightarrow x^2 - 6x - 135 = 0 \Rightarrow x_1 = -9, x_2 = 15.$$

ამრიგად, მეორე ველოსიპედისტის სიჩქარეა 15 კმ/სთ, ხოლო პირველი ველოსიპედისტის სიჩქარე იქნება 18 კმ/სთ.

პასუხი: 18 კმ/სთ, 15 კმ/სთ.

ამოხსნა 2

ვთქვათ პირველმა ველოსიპედისტმა 36 კილომეტრი გაიარა x საათში, მაშინ მეორე ველოსიპედისტმა 45 კილომეტრი გაიარა $(x+1)$ საათში. პირველი ველოსიპედისტის სიჩქარე იქნება $\frac{36}{x}$ კმ/სთ, ხოლო მეორე ველოსიპედისტის სიჩქარე იქნება $\frac{45}{x+1}$ კმ/სთ. ვინაიდან პირველი ველოსიპედისტი ყოველი საათის განმავლობაში გადიოდა 3 კილომეტრით მეტ მანძილს, ვიდრე მეორე, ამიტომ პირველი ველოსიპედისტის სიჩქარე იქნება 3 კმ/სთ-ით მეტი, ვიდრე მეორის სიჩქარე, ამიტომ გვექნება განტოლება $\frac{36}{x} - \frac{45}{x+1} = 3$.

$$\text{გვაქვს } \frac{36}{x} - \frac{45}{x+1} = 3 \Rightarrow 3x^2 + 3x = 36x + 36 - 45x \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = -6, x_2 = 2.$$

ამრიგად, პირველი ველოსიპედისტის სიჩქარე იქნება $\frac{36}{2} = 18$ კმ/სთ, ხოლო მეორე

ველოსიპედისტის სიჩქარე იქნება $\frac{45}{2+1} = 15$ კმ/სთ.

პასუხი: 18 კმ/სთ, 15 კმ/სთ.

ამოხსნის ეტაპები

- ა) ცვლადით გამოსახა თითოეული ველოსიპედისტის სიჩქარე x კმ/სთ და $(x+3)$ კმ/სთ;
ან თითოეული ველოსიპედისტის მოძრაობის დრო x სთ და $(x+1)$ სთ;
ან შემოიტანა ველოსიპედისტების სიჩქარეები x კმ/სთ და y კმ/სთ და მათ მიმართ დაწერა
ორი ცვლადის შემცველი განტოლება (მაგ: $y-x=3$ ან $y-x=1$);
- ბ) გამოსახა თითოეული ველოსიპედისტის მოძრაობის დრო $\frac{45}{x}$ და $\frac{36}{x+3}$;
ან სიჩქარე $\frac{36}{x}$ და $\frac{45}{x+1}$;
ან დაწერა ორუცნობიანი განტოლებათა სისტემა, საიდანაც შესაძლებელია საძიებელი სიდიდეების
პოვნა;
- გ) მიიღო $\frac{45}{x} - \frac{36}{x+3} = 1$, ან $\frac{36}{x} - \frac{45}{x+1} = 3$, ან ერთ-ერთის ტოლფასი განტოლება;
- დ) პასუხი.

შეფასების სქემა

- 1 ქულა - ა.
2 ქულა - ა, ბ.
3 ქულა - ა, ბ, გ.
4 ქულა - ა, ბ, გ, დ.

შენიშვნა. იმ შემთხვევაში, თუ აბიტურიენტმა გამოიცნო პასუხი და შეამოწმა, რომ ის
აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს, იწერება 2 ქულა.

შენიშვნა. ქვემოთ, შეფასების სქემის სტრუქტურული ერთეულის „ამოხსნის ეტაპები“-ს პუნქტ „პასუხი“-ს ქვეშ გაიგება პასუხის დასაბუთებით მიღება.

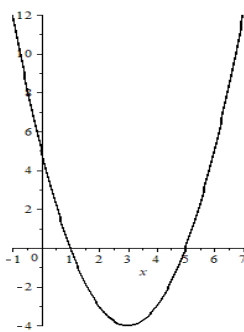
(4) 41. იპოვეთ k პარამეტრის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც

$$|x^2 - 6x + 5| = k^2 - 5k + 5 \text{ განტოლებას აქვს ზუსტად სამი ნამდვილი ამონახსნი.}$$

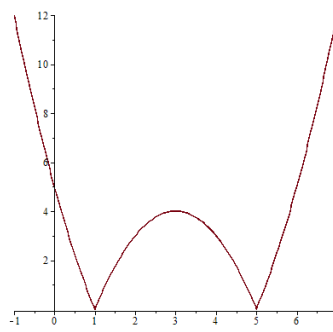
ამოხსნა 1

ამოცანა გავიაზროთ გეომეტრიულად. ნათელია, რომ $|x^2 - 6x + 5| = k^2 - 5k + 5$ განტოლებას რომელიმე ფიქსირებული k პარამეტრისათვის ექნება ზუსტად 3 ამონახსნი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $y = k^2 - 5k + 5$ ჰორიზონტალური წრფე $g(x) = |x^2 - 6x + 5|$ ფუნქციის გრაფიკს გადაკვეთს ზუსტად 3 წერტილში.

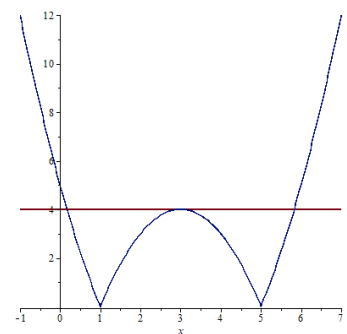
$f(x) = x^2 - 6x + 5$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე (იხ. სურ. 1), რომლის წვეროს კოორდინატებია $(3; -4)$. რიცხვის მოდულის განმარტების გათვალისწინებით ადვილად დავადგენთ, რომ $g(x) = |x^2 - 6x + 5|$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე (იხ. სურ. 2).



სურ.1



სურ. 2



სურ. 3

სურათი 3-დან ნათელია, რომ $y = k^2 - 5k + 5$ ჰორიზონტალური წრფე $g(x)$ ფუნქციის გრაფიკს გადაკვეთს 3 წერტილში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $k^2 - 5k + 5 = 4$. ამ უკანასკნელი განტოლების

ამონახსნებია: $\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}$ და $\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$.

პასუხი: $\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}$ და $\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$.

ამოხსნა 2

საწყის განტოლებას რომ ქონდეს ორზე მეტი ამონახსნი საჭიროა $M = k^2 - 5k + 5$ იყოს დადებითი. ე.ი.

აუცილებელია, რომ $k \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$. ავიღოთ $k \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

რადგან $M > 0$, საწყისი განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე მიიღება შემდეგი ორი განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეების გაერთიანებით:

(1) $x^2 - 6x + 5 = M$ და (2) $x^2 - 6x + 5 = -M$. ცხადია, რომ (1) და (2) განტოლებებს ვერ ექნებათ საერთო ფესვები. ამიტომ, მათი ფესვების გაერთიანება იქნება სამელებმენტიანი მხოლოდ მაშინ, როდესაც ერთ-ერთ განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ფესვი, ხოლო მეორე განტოლებას აქვს ორი განსხვავებული ფესვი. გვაქვს ორი შემთხვევა:

ა) (1) განტოლებას აქვს ერთადერთი ფესვი. მაშინ ამ განტოლების დისკრიმინანტი ტოლია ნულის, ე.ი. $9 - (5 - M) = 0 \Leftrightarrow M = -4$, რაც ეწიინააღმდეგება $M > 0$ უტოლობას. ე.ი. ეს შემთხვევა არ ვარგა.

ბ) (2) განტოლებას აქვს ერთადერთი ფესვი. მაშინ ამ განტოლების დისკრიმინანტი ტოლია ნულის, ე.ი.

$$9 - 5 - M = 0 \Leftrightarrow M = 4. \text{ მაშასადამე, } k^2 - 5k + 5 = 4. \text{ ამ უკანასკნელი განტოლების ამონახსნებია: } \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{და } \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}. \text{ შევამოწმოთ, რომ ამ შემთხვევაში (1) განტოლებას აქვს ორი განსხვავებული ფესვი.}$$

მართლაც, (1) განტოლება არის $x^2 - 6x + 5 = 4$, რომლის დისკრიმინანტი $D > 0$.

$$\text{პასუხი: } \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2} \text{ და } \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

ამოხსნის ეტაპები

ა) იპოვა $f(x) = x^2 - 6x + 5$ ფუნქციის გრაფიკის წვეროს ორდინატა;

ან ამოხსნა $k^2 - 5k + 5 > 0$ ან $k^2 - 5k + 5 \geq 0$ უტოლობა;

ბ) ააგო $g(x) = |x^2 - 6x + 5|$ ფუნქციის გრაფიკი;

ან ამოხსნა უტოლობა $k^2 - 5k + 5 > 0$ და k -თი გამოსახა $|x^2 - 6x + 5| = k^2 - 5k + 5$ განტოლების 4 ფესვი;

ან ამოხსნა უტოლობა $k^2 - 5k + 5 > 0$ და იპოვა $|x^2 - 6x + 5| = k^2 - 5k + 5$ განტოლების ყველა ფესვი

k -ს რომელიმე კონკრეტული მნიშვნელობისათვის;

გ) შეადგინა განტოლება $k^2 - 5k + 5 = 4$ ან მისი ტოლფასი განტოლება;

დ) პასუხი დასაბუთებით.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა.

2 ქულა - ბ; ან გ.

3 ქულა - ბ, გ.

4 ქულა - ბ, გ, დ.

შენიშვნა:

1) თუ შესრულებულია ა) და გ) პუნქტები და ამოხსნილია გ) პუნქტის განტოლება, მაშინ ნაშრომი შეფასდეს 3 ქულით;

2) თუ შესრულებულია გ) პუნქტი და ამოხსნილია გ) პუნქტის განტოლება, ამასთან ნაჩვენებია, რომ (1) განტოლებას $x^2 - 6x + 5 = M$ ყოველთვის აქვს 2 ფესვი, მაშინ ნაშრომი შეფასდეს 3 ქულით;

3) თუ შესრულებულია გ) პუნქტი და ამოხსნილია გ) პუნქტის განტოლება, ამასთან ნაჩვენებია, რომ (1) განტოლებას $(x^2 - 6x + 5 = M)$ ყოველთვის აქვს 2 ფესვი, ამასთან შენიშნა, რომ (1) და (2) განტოლებებს არ აქვთ საერთო ფესვი, მაშინ ნაშრომი შეფასდეს 4 ქულით.