

ამოცანა 1

5 ქულა

Oxy საკოორდინატო სისტემაზე მოცემულია წრეწირი ცენტრით $(0;1)$ წერტილში და რადიუსით 1. იპოვეთ k პარამეტრის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $y = kx^2$ განტოლებით მოცემულ პარაბოლას ამ წრეწირთან აქვს ერთზე მეტი საერთო წერტილი.

ამოხსნა

ვთქვათ პარაბოლას და წრეწირის საერთო წერტილია $(x; y)$. მაშინ, ერთის მხრივ, მანძილი $(0;1)$ წერტილსა და $(x; y)$ წერტილს შორის ტოლია 1-ის, ანუ, $x^2 + (y-1)^2 = 1$, ხოლო მეორეს მხრივ, $y = kx^2$. უკანასკნელი ტოლობის გათვალისწინებით, პირველი ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$x^2 + (kx^2 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + k^2x^4 - 2kx^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(1 - 2k + k^2x^2) = 0.$$

ვღებულობთ, $x = 0$ ან $1 - 2k + k^2x^2 = 0$. პარაბოლას და წრეწირს რომ გააჩნდეს ერთზე მეტი საერთო წერტილი, საჭიროა ამ უკანასკნელ განტოლებას ქონდეს არანულოვანი ამონახსნი.

$$1 - 2k + k^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2k-1}{k^2}.$$

ამ უკანასკნელს აქვს არანულოვანი ამონახსნი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $k > \frac{1}{2}$.

პასუხი: $k > \frac{1}{2}$.

ამოცანა 2

5 ქულა

ABC სამკუთხედის ფართობი 120სმ^2 -ის ტოლია. AB , BC და AC გვერდებზე შესაბამისად აღებულია D , E და F წერტილები ისე, რომ $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$, $\frac{CF}{FA} = 3$ და DEF სამკუთხედის ფართობი 24სმ^2 -ის ტოლია. იპოვეთ $\frac{BE}{EC}$ ფარდობის მნიშვნელობა.

ამოხსნა

ვთქვათ, $\frac{BE}{EC} = x$.

$$(1) \quad S_{\triangle DEF} = S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle ADF} + S_{\triangle BDE} + S_{\triangle CEF}).$$

$$\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AF}{AC} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} \Rightarrow S_{\triangle ADF} = 12 \text{ სმ}^2.$$

$$\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BD}{BA} \cdot \frac{BE}{BC} = \frac{3}{5} \cdot \frac{x}{x+1} \Rightarrow S_{\triangle BDE} = \frac{72x}{x+1} \text{ სმ}^2.$$

$$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{CE}{BC} \cdot \frac{CF}{AC} = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow S_{\triangle CEF} = \frac{90}{x+1}$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულებები (1) ტოლობაში:

$$24 = 120 - \left(12 + \frac{72x}{x+1} + \frac{90}{x+1} \right) \Rightarrow \frac{72x}{x+1} + \frac{90}{x+1} = 84.$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

პასუხი: $\frac{1}{2}$.

ამოცანა 3

5 ქულა

იპოვეთ ყველა მარტივი p რიცხვი, რომელთათვისაც რიცხვს $n = p^2 + 11$ აქვს ზუსტად ექვსი ნატურალური გამყოფი.

ამოხსნა

შევნიშნოთ, რომ თუ n რიცხვის მარტივ მამრავლებად დაშლას აქვს სახე

$$n = p_1^{q_1} p_2^{q_2} \dots p_k^{q_k}, \text{ მაშინ მას აქვს ზუსტად } d(n) = (q_1 + 1)(q_2 + 1) \dots (q_k + 1)$$

ნატურალური გამყოფი.

თუ $p = 2$, მაშინ $n = 2^2 + 11 = 4 + 11 = 15$.

$15 = 3^1 \cdot 5^1$ და $d(n) = (1+1)(1+1) = 4$ ე.ი. $p = 2$ არ აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას.

განვიხილოთ შემდეგი მარტივი რიცხვი $p = 3$, $n = 3^2 + 11 = 9 + 11 = 20 = 2^2 \cdot 5^1$. გამყოფთა რაოდენობაა $d(20) = (2+1)(1+1) = 3 \cdot 2 = 6$ ე.ი. $p = 3$ არის ამონახსნი.

ახლა გავანალიზოთ შემთხვევა, როდესაც $p > 3$.

დავუშვათ, რომ p არის მარტივი რიცხვი, რომელიც მეტია 3-ზე. შევნიშნოთ, რომ

- 1) რადგან p მარტივია და $p \neq 3$, p არ იყოფა 3-ზე. მაშინ, $p = 3k + 1$ ან $p = 3k + 2$, სადაც $k \in \mathbb{N}$. ორივე შემთხვევაში p^2 -ის 3-ზე გაყოფისას მიიღება 1-ის ტოლი ნაშთი, $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$. მაშინ, $n = p^2 + 11$ იყოფა 3-ზე. ე.ი. n ყოველთვის იყოფა 3-ზე, თუ $p > 3$.
- 2) რადგან $p > 3$, p აუცილებლად კენტი რიცხვია, ე.ი. $p = 2m + 1$, სადაც $m \in \mathbb{N}$. მაშინ, $p^2 \equiv 1 \pmod{4}$ და $n = p^2 + 11$ იყოფა 4-ზე.

დასკვნა: $p > 3$ შემთხვევაში, რიცხვი $n = p^2 + 11$ იყოფა როგორც 2^2 -ზე, ისე 3^1 -ზე.

შესაბამისად, n -ის მარტივი მამრავლების დაშლა უნდა შეიცავდეს $2^a \cdot 3^b$ ფორმას, სადაც $a \geq 2$ და $b \geq 1$. n რიცხვის ნატურალურ გამყოფთა რაოდენობაა

$d(n) = (a+1)(b+1) \cdot (\dots)$. რადგან $a \geq 2$, გვაქვს $a+1 \geq 3$. რადგან $b \geq 1$, გვაქვს $b+1 \geq 2$. ამიტომ, $d(n) \geq 3 \cdot 2 = 6$.

ჩვენ გვჭირდება, რომ $d(n)$ იყოს ზუსტად 6. ეს შესაძლებელია მხოლოდ ერთ

შემთხვევაში: $a = 2 \Rightarrow a+1 = 3$, $b = 1 \Rightarrow b+1 = 2$ და n -ს არ აქვს სხვა მარტივი გამყოფი (გარდა 2-ისა და 3-ისა). ე.ი. $n = 2^2 \cdot 3^1 = 12$. მაგრამ, ეს შეუძლებელია, რადგან $p > 3$.

პასუხი: $p = 3$.

ამოცანა 4

5 ქულა

გამოთვალეთ $\frac{a_1^3}{1-3a_1+3a_1^2} + \frac{a_2^3}{1-3a_2+3a_2^2} + \dots + \frac{a_{2025}^3}{1-3a_{2025}+3a_{2025}^2}$ ჯამის მნიშვნელობა,

სადაც $a_n = \frac{n}{2025}$, $n = 1, 2, \dots, 2025$.

ამოხსნა

წილადის მნიშვნელი $1-3a_n+3a_n^2 = (1-a_n)^3 + a_n^3$, ამიტომ, ჯამის ყოველი წევრი მიიღებს

ფორმას: $T_n = \frac{a_n^3}{(1-a_n)^3 + a_n^3}$.

განვიხილოთ წევრები, რომელთა ინდექსების ჯამია 2025 (ანუ k და $2025-k$).

$$a_{2025-k} = \frac{2025-k}{2025} = 1 - \frac{k}{2025} = 1 - a_k.$$

ახლა შევკრიბოთ T_k და T_{2025-k} :

$$T_k + T_{2025-k} = \frac{a_k^3}{a_k^3 + (1-a_k)^3} + \frac{a_{2025-k}^3}{a_{2025-k}^3 + (1-a_{2025-k})^3}.$$

ჩავსვათ $a_{2025-k} = 1 - a_k$:

$$T_k + T_{2025-k} = \frac{a_k^3}{a_k^3 + (1-a_k)^3} + \frac{(1-a_k)^3}{(1-a_k)^3 + a_k^3} = 1. \text{ შევნიშნოთ, რომ } T_{2025} = 1.$$

მაშინ,

$$\sum_{n=1}^{2025} T_n = \sum_{n=1}^{2024} T_n + T_{2025} = \sum_{k=1}^{1012} (T_k + T_{2025-k}) + 1 = 1012 \cdot 1 + 1 = 1013.$$

პასუხი: 1013.

ამოცანა 5

5 ქულა

მოცემულია ABC მახვილკუთხა სამკუთხედი, რომელშიც AD არის BC გვერდზე დაშვებული სიმაღლე. AD მონაკვეთზე, როგორც დიამეტრზე, აგებულია წრეწირი, რომელიც AB გვერდს კვეთს K წერტილში, ხოლო AC გვერდს L წერტილში ($L \neq A$, $K \neq A$). დაამტკიცეთ, რომ $KLCB$ ოთხკუთხედზე შემოიხაზება წრეწირი.

ამოხსნა

რადგან წრეწირი აგებულია AD დიამეტრზე, ნებისმიერი კუთხე, რომელიც ამ დიამეტრს ეყრდნობა და წრეწირზე მდებარეობს, არის მართი. შესაბამისად, $\angle AKD = 90^\circ$ და $\angle ALD = 90^\circ$. ეს ნიშნავს, რომ $DK \perp AB$ და $DL \perp AC$.

განვიხილოთ მსგავსი მართკუთხა სამკუთხედები: $\triangle ABD \sim \triangle ADK$. მსგავსებიდან გამომდინარეობს გვერდების პროპორციულობა:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AK}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB \cdot AK.$$

ანალოგიურად, $\triangle ACD \sim \triangle ADL$. აქედან გამომდინარეობს:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AL}{AD} \Rightarrow AD^2 = AC \cdot AL.$$

ზედა ტოლობებიდან ვღებულობთ: $AB \cdot AK = AC \cdot AL$, ანუ $\frac{AK}{AC} = \frac{AL}{AB}$.

ეს უკანასკნელი პროპორცია ნიშნავს, $\triangle AKL \sim \triangle ACB$. ამ სამკუთხედების მსგავსებიდან მსგავსებიდან გამომდინარეობს, რომ შესაბამისი კუთხეები ტოლია:

$$\angle AKL = \angle ACB, \angle ALK = \angle ABC.$$

რადგან $\angle AKL = \angle ACB$, ამიტომ $KLCB$ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი ტოლია 180° : $\angle BKL + \angle LCB = 180^\circ$. ეს ნიშნავს, რომ ოთხკუთხედი $KLCB$ არის ციკლური, ანუ მასზე შემოიხაზება წრეწირი.

