

ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადის მათემატიკაში  
2025-26 სასწავლო წელი  
II ტური XI-XII კლასი

---

**Задача 1**

**5 баллов**

На доске написаны натуральные числа от 1 до 89 включительно. Из этих 89 чисел Георгий выбрал 44 числа и сложил их. Из оставшихся 45 чисел Тамара выбрала 44 числа и сложила их. Оказалось, что сумма, полученная Георгием, в три раза превышает сумму, полученную Тамарой. Георгий и Тамара удалили выбранные числа. Какое число осталось написанным на доске? (Найдите все такие возможные числа).

---

**Задача 2**

**5 баллов**

Пусть  $a$  и  $b$  — неотрицательные действительные числа, удовлетворяющие неравенству  $a + b \leq 2$ . Докажите, что справедливо неравенство  $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}$ .

---

**Задача 3**

**5 баллов**

Найдите все положительные целые числа  $n$  такие, чтобы значение выражения  $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 3$  было целым числом.

---

**Задача 4**

**5 баллов**

Биссектриса угла  $B$  остроугольного треугольника  $ABC$  и биссектриса внешнего угла этого треугольника при вершине  $C$  пересекаются в точке  $D$ . Докажите, что точка  $A$  лежит на диаметре окружности, описанной около треугольника  $BCD$ , одним из концов которого является точка  $D$ .

---

**Задача 5**

**5 баллов**

В остроугольном треугольнике  $ABC$  имеем  $\angle BAC = 60^\circ$ . Точка пересечения высот этого треугольника  $H$ , а центр описанной окружности  $O$ . Кроме того, известно, что  $H \neq O$ . Через точки  $H$  и  $O$  проведена прямая, пересекающая стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Докажите, что треугольник  $AMN$  равносторонний.