

ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში
2025-26 სასწავლო წელი
II ტური XI-XII კლასი

ამოცანა 1

5 ქულა

დაფაზე დაწერილია 1-დან 89-ის ჩათვლით ნატურალური რიცხვები. ამ 89 რიცხვიდან გიორგიმ შეარჩია 44 რიცხვი და შეკრიბა. დარჩენილი 45 რიცხვიდან თამარმა შეარჩია 44 რიცხვი და შეკრიბა. აღმოჩნდა, რომ გიორგის მიერ მიღებული ჯამი სამჯერ მეტია თამარის მიერ მიღებულ ჯამზე. გიორგიმ და თამარმა შერჩეული რიცხვები წაშალეს. რა რიცხვი დარჩა დაფაზე დაწერილი? (იპოვეთ ყველა ასეთი შესაძლო რიცხვი).

ამოხსნა

ვთქვათ გიორგის მიერ შერჩეული 44 რიცხვის ჯამია S_1 , თამარის მიერ შერჩეული 44 რიცხვის ჯამია S_2 . მაშინ S_1 -ის უდიდესი შესაძლო მნიშვნელობა იქნება

$$S_1 = 46 + 47 + 48 + \dots + 89 = \frac{46+89}{2} \cdot 44 = 2970. \quad S_2\text{-ის უმცირესი შესაძლო მნიშვნელობა იქნება}$$

$$S_2 = \frac{1+2+3+\dots+44}{2} \cdot 44 = 990. \quad \text{შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში } S_1 = 3S_2. \quad (\text{ეს ტოლობა}$$

საზოგადოდ სამართლიანია 1-დან $2n+1$ -ის ჩათვლით ნატურალური რიცხვების შემთხვევაში. კერძოდ პირველი n ცალი რიცხვის ჯამი 3-ჯერ ნაკლებია ბოლო n ცალი რიცხვის ჯამზე).

ამრიგად გიორგის მიერ მიღებული ჯამი სამჯერ მეტი იქნება თამარის მიერ მიღებულ ჯამზე მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც გიორგი შეარჩევს უდიდეს 44 რიცხვს, ხოლო თამარი შეარჩევს უმცირეს 44 რიცხვს. ასე, რომ დაფაზე დარჩენილი რიცხვი იქნება 45.

პასუხი: 45.

ამოცანა 2

5 ქულა

ვთქვათ a და b არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვები აკმაყოფილებენ უტოლობას $a+b \leq 2$. დაამტკიცეთ, რომ მაშინ სამართლიანია უტოლობა $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}$.

ამოხსნა

$$\text{გვაქვს } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} = \frac{2+a^2+b^2}{(1+a^2)(1+b^2)} = 1 + \frac{1-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}. \quad \text{აღვნიშნოთ, რომ ვინაიდან}$$

$2ab \leq a^2 + b^2$, ამიტომ სამართლიანია უტოლობა $(1+ab)^2 \leq (1+a^2)(1+b^2)$. ამავე დროს ვინაიდან ამოცანის პირობით a და b არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვებია და $a+b \leq 2$,

ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადის მათემატიკაში
2025-26 სასწავლო წელი
II ტური XI-XII კლასი

ამიტომ $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq 1$. ამ უტოლობების გათვალისწინებით გვექნება

$$1 + \frac{1-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq 1 + \frac{1-a^2b^2}{(1+ab)^2} = \frac{1+2ab+a^2b^2+1-a^2b^2}{(1+ab)^2} = \frac{2(1+ab)}{(1+ab)^2} = \frac{2}{1+ab}.$$
 ამრიგად,

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} = 1 + \frac{1-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq \frac{2}{1+ab}, \text{ რ.დ.გ.}$$

ამოცანა 3

5 ქულა

იპოვეთ ყველა მთელი დადებითი რიცხვი n ისეთი, რომ $\sqrt{n} + \sqrt{n+\sqrt{n}-3}$ გამოსახულების მნიშვნელობა იყოს მთელი რიცხვი.

ამოხსნა

ვთქვათ k არის ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი, რომ $\sqrt{n} + \sqrt{n+\sqrt{n}-3} = k$. მაშინ

$$\sqrt{n+\sqrt{n}-3} = k - \sqrt{n} \Rightarrow n + \sqrt{n} - 3 = k^2 - 2k\sqrt{n} + n \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{k^2 + 3}{2k + 1}.$$

მიღებული ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ვინაიდან k და n მთელი რიცხვებია, ამიტომ $\sqrt{n}$ ასევე არაუარყოფითი მთელი რიცხვი უნდა იყოს. ვთქვათ $\sqrt{n} = q$. მაშინ გვაქვს განტოლება $k^2 - 2qk + 3 - q = 0$. ცხადია, რომ ამ კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტიც უნდა იყოს სრული კვადრატი, ამიტომ $(2q)^2 - 4(3-q) = m^2$, სადაც m რაღაც არაუარყოფითი მთელი რიცხვია. მაშინ

$$(2q)^2 - 4(3-q) = m^2 \Rightarrow (2q+1)^2 - m^2 = 13 \Rightarrow (2q+1+m)(2q+1-m) = 13 \Rightarrow \begin{cases} 2q+1+m=13 \\ 2q+1-m=1 \end{cases} \Rightarrow q=3.$$

ამრიგად, $\sqrt{n} = 3 \Rightarrow n = 9$. მართლაც, თუ $n = 9$, მაშინ $\sqrt{n} + \sqrt{n+\sqrt{n}-3} = 6$.

პასუხი: $n = 9$.

ABC მახვილკუთხა სამკუთხედის *B* კუთხის ბისექტრისა და *C* წვეროსთან მდებარე ამ სამკუთხედის გარე კუთხის ბისექტრისა იკვეთება *D* წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ *A* წერტილი მდებარეობს *BCD* სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის იმ დიამეტრზე, რომლის ერთი ბოლო არის *D* წერტილი.

ამოხსნა

ვთქვათ $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ და $\angle ACB = \gamma$. D წერტილზე გავავლოთ წრეწირის მხეზი წრფე, რომელიც BC გვერდის გაგრძელებას კვეთს K წერტილში. D და A წერტილებზე გავავლოთ

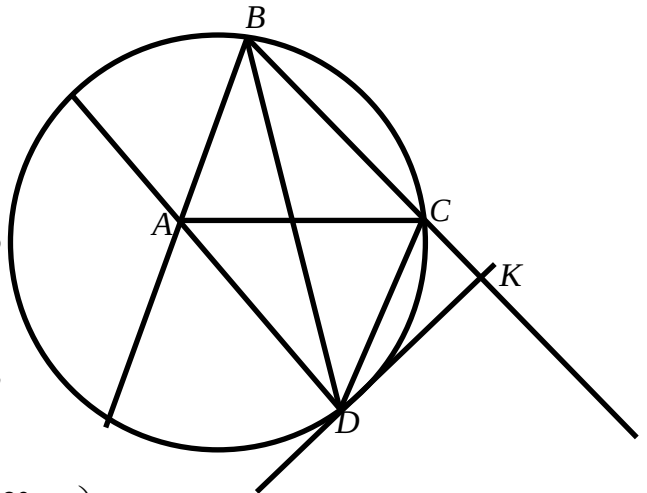
წრეწირის ქორდა. გვაქვს $\angle CDK = \frac{DC}{2} = \angle CBD = \frac{\beta}{2}$.

შევნიშნოთ, რომ AD იქნება ABC სამკუთხედის A წვეროსთან მდებარე გარე კუთხის ბისექტრისა, ამიტომ

$$\angle ADC = 180^\circ - (\angle DAC + \angle DCA) = 180^\circ - \left(\frac{180^\circ - \alpha}{2} + \frac{180^\circ - \gamma}{2} \right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}. \text{ ამრიგად}$$

$$\angle ADK = \angle ADC + \angle CDK = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ. \quad \text{ვინაიდან } DK \text{ წრეწირის მხეზია და}$$

$DK \perp DA$, ამიტომ D და A წერტილებზე გავლებული წრეწირის ქორდა დიამეტრია. რ.დ.გ.

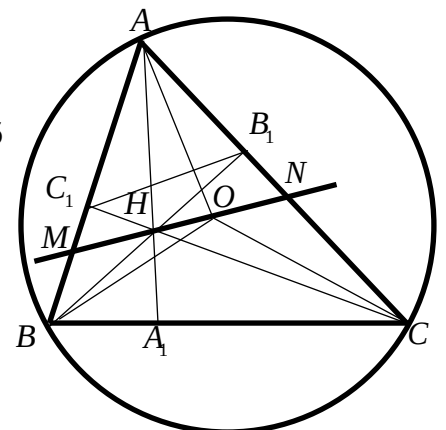


ABC მახვილკუთხა სამკუთხედში $\angle BAC = 60^\circ$. ამ სამკუთხედის სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილია H , ხოლო შემოხაზული წრეწირის ცენტრია O , ამასთან ცნობილია, რომ $H \neq O$. H და O წერტილებზე გავლებულია წრფე, რომელიც AB და AC გვერდებს კვეთს შესაბამისად M და N წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ AMN სამკუთხედი არის ტოლგვერდა.

ამოხსნა

ဒသနဲ့ $\frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB} = \cos \angle BAC = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. ဆိုလို့ရင် AB_1C_1 သေ

ABC სამკუთხედები მსგავსია ორ-ორი გვერდის პროპორციულობით და მათ შორის საერთო კუთხით, ამასთან მსგავსების კოეფიციენტი $\frac{1}{2}$. მაშინ მსგავს AB_1C_1 და ABC სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირების დიამეტრების შეფარდებაც იქნება $\frac{1}{2}$ -ის ტოლი. შევნიშნოთ, რომ რადგან



ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადა მათემატიკაში
2025-26 სასწავლო წელი
II ტური XI-XII კლასი

$\angle AC_1H = \angle AB_1H = 90^\circ$, ამიტომ AH იქნება AB_1C_1

სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრი,

ამიტომ $\frac{AH}{2AO} = \frac{1}{2} \Rightarrow AH = AO$, ე. ი. $\triangle HAO$ ტოლფერდაა, მაშასადამე $\angle AHO = \angle AOH$ და

შესაბამისად $\angle AHM = \angle AON$. ამავე დროს

$$\angle MAH = \angle BAA_1 = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \frac{\angle AOC}{2} = \angle OAC = \angle OAN.$$

ამრიგად $\triangle MAH$ და $\triangle NAO$ ტოლია ერთი გვერდისა და მასთან მდებარე ორი კუთხის
ნიშნით, ამიტომ $AM = AN$ და ვინაიდან მათ შორის კუთხე 60° -ია, ამიტომ $\triangle AMN$
სამკუთხედი არის ტოლგვერდა, რ.დ.გ.